NOTES DU COURS DE MATHS3

CHRISTIAN LÉONARD

1. Rappels sur les espaces vectoriels

Nous rappelons quelques propriétés fondamentales de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. *Nous revisitons en particulier les notions de* base vectorielle *et de* matrice *qui ont été introduites dans le cours de Maths2.*

1.1. **Vecteurs, bases, parties libres.** L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est composé des éléments $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) = (x_i)_{1 \le i \le n}$ où les $x_i, 1 \le i \le n$ sont des nombres réels. $\mathbb{R}^n$ est donc le produit cartésien de n copies de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$. On appelle $\overrightarrow{x}$ un *vecteur* et $x_i \in \mathbb{R}$ est sa $i^{\text{ème}}$ *coordonnée*. On munit l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des opérations suivantes. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la *multiplication externe* par

$$\lambda \overrightarrow{x} \triangleq (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$

et l'*addition* par

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \triangleq (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Le signe $\triangleq$ (égale surmonté de la lettre delta) signifie que l'égalité correspond à une définition. Nous le rencontrerons de temps en temps dans ce cours. Dans l'écriture $\lambda \overrightarrow{x}$ de la multiplication externe, le signe multiplié n'est pas écrit explicitement. Tout comme dans la multiplication habituelle des nombres réels que nous retrouvons dans $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$. Dans l'écriture $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, le signe $+$ correspond à une addition de vecteurs, mais on utilise la même notation que pour l'addition des nombres réels que nous retrouvons dans l'addition terme à terme des coordonnées : $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$.
La *base canonique* de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ où

$$\overrightarrow{e_1} \triangleq (1, 0, \dots, 0), \overrightarrow{e_2} \triangleq (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \overrightarrow{e_n} \triangleq (0, \dots, 0, 1).$$

Date: 2004.

Nous noterons donc $\overrightarrow{e_i}$ le vecteur constitué de $n-1$ zéros et d'un unique 1 placé en $i^{\text{ème}}$ coordonnée.
Nous pouvons donc écrire notre vecteur $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sous la forme

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} \tag{1.1}$$

L'ordre des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ est important pour pouvoir repérer un vecteur à l'aide de ses coordonnées. Par exemple lorsque la *dimension* de l'espace est $n = 2$, la base canonique est donnée par $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{x} = (2.6, -3)$ a pour coordonnées $x_1 = 2.6$ et $x_2 = -3$ dans la base canonique. On peut donc écrire : $\overrightarrow{x} = 2.6\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$. Si on inverse l'ordre de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e}_2$, on tombe sur le vecteur $2.6\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_1} = 2.6(0, 1) - 3(1, 0) = (-3, 2.6)$ qui est différent de $\overrightarrow{x} = (2.6, -3)$. Pour insister sur l'ordre des vecteurs, on écrit la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ entre parenthèses. Ainsi $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est différent de $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1})$. De manière générale, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est aussi notée entre parenthèses : $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$.
Il va de soit que tout vecteur $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de façon **unique** sous la forme (1.1). Cela signifie si $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ se *décompose dans la base* canonique sous la forme $\overrightarrow{x} = x'_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x'_n\overrightarrow{e_n}$ alors $x'_1 = x_1, \dots\ x'_n = x_n$.

Définition 1.2 (Base de $\mathbb{R}^n$.)**.** *On dit que* $(\overrightarrow{e_1}', \dots \overrightarrow{e_n}')$ *forme une* base *de* $\mathbb{R}^n$ *si* $\overrightarrow{e_1}', \dots \overrightarrow{e_n}'$ *sont des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et que tout vecteur* $\overrightarrow{x}$ *se décompose de manière* ***unique*** *sous la forme*

$$\overrightarrow{x} = x'_1\overrightarrow{e_1}' + x'_2\overrightarrow{e_2}' + \cdots + x'_n\overrightarrow{e_n}'.$$

Dans ce cas, les nombres $x'_1, \dots, x'_n \in \mathbb{R}$ *sont appelés les* coordonnées *du vecteur* $\overrightarrow{x}$ *dans la base* $(\overrightarrow{e_1}', \dots \overrightarrow{e_n}')$.

Exemple. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère $\overrightarrow{e_1}' = (1, 0)$, $\overrightarrow{e_2}' = (0, -2)$. Montrons que $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Dire que le vecteur $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ se décompose selon $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$, c'est écrire qu'il existe $x'_1, x'_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x_1, x_2) = x'_1\overrightarrow{e_1}' + x'_2\overrightarrow{e_2}' = x'_1(1, 0) + x'_2(0, -2) = (x'_1, -2x'_2).$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= -\frac{1}{2}x_2 \end{cases} \tag{1.3}$$

en identifiant les coordonnées des vecteurs de gauche et de droite de la série d'égalités précedente. Les nombres x'_1 et x'_2 s'expriment de manière unique en fonction de x_1 et x_2; on en déduit que $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ est bien une base, puisque le vecteur $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ est arbitraire.
Représentation graphique.

Théoreme 1.4 (Résultat admis)**.** *Les bases de* $\mathbb{R}^n$ *sont les* parties libres *de* $\mathbb{R}^n$ *constituées d'exactement* n *vecteurs.*

On rappelle la définition suivante.

Définition 1.5 (Partie libre)**.** *On dit que* $\{\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}\}$ *est une* partie libre *si pour tous* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *réels*

$$(\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0}) \Rightarrow (\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0).$$

On dit que $\{\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}\}$ *est une* partie liée *si elle n'est pas une partie libre.*

Nous avons utilisé la notation $\overrightarrow{0} = (0, \dots, 0)$ pour le *vecteur nul.* On dit aussi que $\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p}$ est une *combinaison linéaire.* Plus précisément, c'est la combinaison linéaire des vecteurs $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p})$ de coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.
Une partie $\{\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}\}$ est liée si et seulement s'il existe des coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ non-(tous nuls) tels que la combinaison linéaire $\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p}$ s'annule. En d'autres termes, ue partie $\{\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}\}$ est liée si et seulement s'il existe des coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0}$. Si par exemple, le coefficient λ_1 n'est pas nul, alors on peut diviser par λ_1 et on obtient :

$$\overrightarrow{x_1} = -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p}).$$

Si $\lambda_1 = 0$, on sait qu'il existe un autre λ_i qui n'est pas nul, disons λ_{i_o} et on obtient de même : $\overrightarrow{x_{i_o}} = -\frac{1}{\lambda_{i_o}} \sum_{i \neq i_o} \lambda_i \overrightarrow{x_i} = \sum_{i \neq i_o} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_o}} \overrightarrow{x_i}$. Nous avons presque montrer la

Proposition 1.6. *Une partie* $\{\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}\}$ *est liée si et seulement si un de ses vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.*

Démonstration. En fait nous avons seulement montrer que *si* $\{\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}\}$ est liée *alors* un de ses vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Pour s'assurer de la réciproque, il suffit de remarquer que *si* un de ses vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs, disons $\overrightarrow{x_{i_o}} = \sum_{i \neq i_o} \mu_i \overrightarrow{x_i}$, *alors* il existe une combinaison linéaire à coefficients non-(tous nuls) des $\overrightarrow{x_i}$ qui s'annule. Mais, c'est précisément le cas de $\overrightarrow{x_{i_o}} - \sum_{i \neq i_o} \mu_i \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0}$. Ce qui achève la preuve de la réciproque et de la proposition. □

Exemples.
- Dans $\mathbb{R}^2$ la partie $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$ est liée ssi (si et seulement si) les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont colinéaires.
- Dans $\mathbb{R}^3$ la partie $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\}$ est liée ssi les vecteurs $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$ sont coplanaires.

Représentation graphique.

Exemple. Considérons les vecteurs $\overrightarrow{e_1}' = (0,2)$ et $\overrightarrow{e_2}' = (1,1)$.
Montrons que $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Puisque nous avons deux vecteurs en dimension deux, d'après le Théorème 1.4, il suffit de montrer que $\{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}'\}$ est une partie libre. Pour cela, on revient à la définition 1.5 des parties libres. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \overrightarrow{e_1}' + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & (\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \\
\Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

L'unique solution de ce système linéaire est $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, ce qui s'écrit aussi $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$. Par conséquent $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ est une partie libre de $\mathbb{R}^2$.

1.2. **Changement de base.** Nous avons vu en (1.3) que $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 \\ x_2' & = & -\frac{1}{2} x_2 \end{array} \right.$ et nous avons vu en première année que ceci s'écrit matriciellement sous la forme

$$X' = QX$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Exemple. Reprenons l'exemple des vecteurs $\overrightarrow{e_1}' = (0,2)$ et $\overrightarrow{e_2}' = (1,1)$ étudié plus haut. Nous avons déjè montré que $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Nous avons donc deux bases que nous noterons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$
D'après la Définition 1.2 d'une base, on sait que tout vecteur $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$. Exprimons maintenant cette décomposition. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} \overrightarrow{e_1}' & = & 0\overrightarrow{e_1} & + & 2\overrightarrow{e_2} & = & & & 2\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}' & = & 1\overrightarrow{e_1} & + & 1\overrightarrow{e_2} & = & \overrightarrow{e_1} & + & \overrightarrow{e_2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} \overrightarrow{e_1} & = & -\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}' & + & \overrightarrow{e_2}' \\ \overrightarrow{e_2} & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}' & & \end{array} \right.$$

donc

$$\overrightarrow{x} = x_1(-\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}' + \overrightarrow{e_2}') + x_2\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}' = (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)\overrightarrow{e_1}' + x_1\overrightarrow{e_2}'.$$

Notons (x_1', x_2') les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $\overrightarrow{x} = x_1'\overrightarrow{e_1}' + x_2\overrightarrow{e_2}'$. Par *unicité de la décomposition* dans la base $\mathcal{B}'$, on obtient le droit d'identifier les coefficient dans les deux expressions de $\overrightarrow{x}$, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1' & = & -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' & = & x_1 & & \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$X' = QX$$

avec $Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ sont les *matrices coordonnées* de $\overrightarrow{x}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la formule $X' = QX$ permet d'exprimer X' en fonction de X, c'est-à-dire d'exprimer les coordonnées X' d'un vecteur quelconque dans la *nouvelle base* $\mathcal{B}'$ en fonction des coordonnées X dans l'*ancienne base* $\mathcal{B}$.
On vient d'obtenir la matrice Q à l'aide de la résolution d'un système linéaire. On a donc inverser une matrice de façon implicite. Quelle cette matrice P telle que $Q = P^{-1}$.
Pour répondre à cette question, inversons la matrice Q, c'est-à-dire : calculons son inverse $P = Q^{-1}$. Les étapes de la méthode de la matrice témoin sont les suivantes :

$$(1) : \left[\begin{array}{cccc} -1/2 & 1/2 & | & 0 & 1 \\ 1 & 0 & | & 0 & 1 \end{array} \right] \to (2) : \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & | & -2 & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & 1 \end{array} \right] \to (3)$$

$$(3) : \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & | & -2 & 0 \\ 0 & 1 & | & 2 & 1 \end{array} \right] \to (4) : \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 & 1 \end{array} \right]$$

de sorte que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \triangleq P.$$

Nous constatons que les **colonnes** de P sont précisément les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. En effet, $\overrightarrow{e_1}' = (0, 2)$ et $\overrightarrow{e_2}' = (1, 1)$ et puisque $\mathcal{B}$ est la base canonique, ceci signifie ce que nous venons d'énoncer.
On appellera dans un instant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Notons en passant que puisque $X' = QX$, nous avons $Q^{-1}X' = X$, c'est-à-dire

$$X = PX'.$$

On peut tester aisément cette formule avec $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui correspond au vecteur $\overrightarrow{e_1}'$. On obtient $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{e_1}' = 0\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$. De même, avec $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui correspond au vecteur $\overrightarrow{e_2}'$. On obtient $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{e_2}' = 1\overrightarrow{e_1} + 1\overrightarrow{e_2}$.
En fait, ce phénomène est général. Avant d'énoncer au Théorème 1.9 plus bas, le résultat général, nous allons fixer quelques définitions utiles.

Définition 1.7 (Vecteur-coordonnées)**.** *On se place dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$ (il n'est pas nécessaire que ce soit la base canonique). On dit que la* ***matrice colonne*** *$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le* vecteur-coordonnées *du vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}$ si $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$.*

On notera de même $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ le vecteur-coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}'$: $\overrightarrow{x} = x'_1\overrightarrow{e_1}' + \cdots + x'_n\overrightarrow{e_n}'$.

Définition 1.8 (Matrice de passage)**.** *On se place dans $\mathbb{R}^n$. Soient $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}')$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ (il n'est pas nécessaire que l'une des deux soit la base canonique). Soient $P_1, \dots, P_n$ les n vecteurs des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$: $\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle la matrice*

$$P \triangleq \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les vecteurs-coordonnées $P_1, \dots, P_n$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème important.

Théoreme 1.9 (Formules de changement de bases)**.** *On considère deux bases de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soient X et X' les vecteurs-coordonnées de $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.*

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors P est une matrice inversible et nous avons les formules de changement de base

$$X' = P^{-1}X \qquad \textit{et} \qquad X = PX'.$$

Démonstration. Commençons par une notation préliminaire. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n réels et $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ sont n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note la combinaison linéaire

$$x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} \triangleq (\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On pourra remarquer que cette notation n'est pas choisie au hasard, car elle est cohérente avec celle du produit scalaire de deux vecteurs ainsi qu'avec celle habituelle du produit matriciel en considérant la matrice $n \times n$: $V = (V_1, \ldots, V_n)$ dont les colonnes sont les vecteurs-coordonnées des $\overrightarrow{v_i}$.

Avec cette notation, nous avons

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) \cdot X \triangleq \mathcal{B} \cdot X$$

qui exprime de façon condensée que X est le vecteur-coordonnées de $\overrightarrow{x} = \mathcal{B} \cdot X$ dans la base $\mathcal{B}$. De même nous avons :

$$\overrightarrow{x} = \mathcal{B} \cdot X = \mathcal{B}' \cdot X'.$$

Nous avons aussi : $\overrightarrow{e_i}' = \mathcal{B} \cdot P_i$ qui exprime que le vecteur-coordonnées de $\overrightarrow{e_i}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est P_i. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= \mathcal{B}' \cdot X' = (\overrightarrow{e_1}', \ldots, \overrightarrow{e_n}') \cdot X' \\ &= (\mathcal{B} \cdot P_1, \ldots, \mathcal{B} \cdot P_n) \cdot X' \\ &= \mathcal{B} \cdot (P_1 \cdots P_n)X' \\ &= \mathcal{B} \cdot PX'. \end{aligned}$$

Puisque d'autre part $\overrightarrow{x} = \mathcal{B} \cdot X$, l'unicité de la décomposition dans la base $\mathcal{B}$ nous permet d'identifier les vecteurs-coordonnées, d'où il vient que :

$$X = PX'.$$

On peut raisonner de façon similaire en considérant le passage inverse de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. On obtient alors la formule de passage

$$X' = QX$$

où Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. Nous avons donc pour tout X,

$$X = PX' = PQX.$$

Ce qui signifie que $PQ = I$ où I désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^n$. On en déduit (voir le cours de Maths2) que P est inversible et que $Q = P^{-1}$. Ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

1.3. **Un exemple de changement de base : le changement d'échelle.** Soit λ un nombre réel non nul et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$. On considère la nouvelle base $\mathcal{B}'$ définie par $\overrightarrow{e_i}' = \lambda \overrightarrow{e_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Exercice. Montrer que du fait que $\lambda \neq 0$, $\mathcal{B}'$ est bien une base.

Alors la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$ et $P^{-1} = \frac{1}{\lambda} I = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$

On a donc $X = \lambda X'$ et $X' = \frac{1}{\lambda} X$.

On peut compliquer la situation en considérant 3 nombres non nuls λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\overrightarrow{e_i}' = \lambda_i \overrightarrow{e_i}$, $i = 1, 2, 3$. Les changements d'échelles ne sont pas nécessairement les mêmes dans les différentes directions portées par les trois vecteurs de base. Alors, $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix}$. On a donc $x_i = \lambda_i x_i'$ et $x_i' = \frac{1}{\lambda_i} x_i$, $i = 1, 2, 3$.

1.4. **Les rotations planes.** Cette section du cours va nous permettre d'illustrer certains changements de base naturels tout en revoyant de la trigonométrie élémentaire : tout ce qu'il faut savoir sur les sinus et les cosinus. Ces fonctions "oscillantes" interviennent de façon incontournable dans certains modèles élémentaires d'évolution de paramètres économiques comme l'*oscillateur de Samuelson.*

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère la rotation d'angle θ qui à $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ associe $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.

représentation graphique

Par définition de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, on a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{f_1} & = & \cos\theta\ \overrightarrow{e_1} & + & \sin\theta\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2} & = & -\sin\theta\ \overrightarrow{e_1} & + & \cos\theta\ \overrightarrow{e_2} \end{array}\right.$$

La matrice associée à cette transformation dans la base canonique est

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

puisque les vecteurs-coordonnées de $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ dans la base canonique sont les vecteurs colonnes de $R(\theta)$, à savoir : $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

Notons ρ_θ la transformation géométrique appelée "rotation d'angle θ" telle que $\rho_\theta(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{f_1}$ et $\rho_\theta(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{f_2}$. On dit alors que ρ_θ est représentée par la matrice $R(\theta)$ dans la base canonique. On constate géométriquement que lorsqu'on effectue à la suite une rotation d'angle α puis une rotation d'angle β, la transformation résultante est une rotation d'angle $\alpha+\beta$. Ce qui se traduit mathématiquement par $\rho_\beta \circ \rho_\alpha = \rho_{\alpha+\beta}$ où $\circ$ est le symbole de la composition des applications. On a de même, $\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\beta+\alpha}$, et par conséquent

$$\rho_{\alpha+\beta} = \rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_\beta \circ \rho_\alpha.$$

On en déduit l'écriture matricielle analogue (voir le cours de Maths2) : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha).$$

Grâce à (1.10) nous avons $R(\alpha+\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$ ainsi que le produit

$$\begin{array}{rcl} R(\alpha)R(\beta) & = & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} \end{array}$$

et en identifiant du fait de $R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$, nous obtenons les formules bien connues de trigonométrie élémentaire

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & = & \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{array}$$

Finalement, remarquons que nous avons défini les fonctions sinus et cosinus de telle sorte que le vecteur image de $\overrightarrow{e_1}$: $\overrightarrow{f_1} = \rho_\theta(\overrightarrow{e_1})$ ait même longueur que $\overrightarrow{e_1}$. C'est-à-dire que leurs normes enclidiennes soient égales, donc $\|\overrightarrow{f_1}\|^2 = \|\overrightarrow{e_1}\|^2$. Or $\|\overrightarrow{e_1}\|^2 = 1^2+0^2 = 1$ et $\|\overrightarrow{f_1}\|^2 = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2$. Donc nous avons

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1. \tag{1.11}$$

2. Déterminants

Commençons par l'étude de la dimension 2. On considère la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}$. Le *déterminant* de M est

$$\det(M) = \det(A, B) \triangleq a\beta - \alpha b.$$

Proposition 2.1. $\det(A, B) = 0$ *si et seulement si A et B sont colinéaires.*

Démonstration. Commençons par la réciproque : $\Leftarrow$. Dire que A et B sont colinéaire signifie que : soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda A$, soit $A = 0$. Si $B = \lambda A$ pour un certain réel λ, alors $a\beta - \alpha b = a\lambda - \lambda ab = 0$. Si $A = 0$, alors $a\beta - \alpha b = 0$. dans les deux cas le déterminant est nul.
Montrons l'assertion directe : $\Rightarrow$. Nous allons considérer les trois cas : $b\beta \neq 0$, $b = 0$ et $\beta = 0$.

- Si $b\beta \neq 0$, $a\beta - \alpha b = 0$ équivaut à $a/b = \alpha/\beta$. En posant $\mu = a/b = \alpha/\beta$, on a $a = \mu b$ et $\alpha = \mu\beta$; c'est-à-dire : $A = \mu B$.
- Si $b = 0$, $a\beta - \alpha b = 0$ équivaut $a\beta = 0$ ce qui équivaut à nouveau à : $a = 0$ ou $\beta = 0$. Si $\beta = 0$, alors $B = 0$, et si $a = 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$. Dans les deux cas A et B sont colinéaires.
- Si $\beta = 0$, $a\beta - \alpha b = 0$ équivaut $\alpha b = 0$ ce qui équivaut à nouveau à : $\alpha = 0$ ou $b = 0$. Si $b = 0$, alors $B = 0$, et si $\alpha = 0$ alors $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans les deux cas A et B sont colinéaires.

□

Les propriétés suivantes sont montrent par des calculs directs et simples.

Proposition 2.2 (Propriétés élémentaires de $\det(A, B)$)**.** *Pour toutes matrices-colonne de $\mathbb{R}^2$ A, A', B, B' et tous réels λ, μ,*

(1) $\det(A, B) = -\det(B, A)$
(2) $\det(\lambda A, \mu B) = \lambda\mu \det(A, B)$
(3) $\det(A + A', B) = \det(A, B) + \det(A', B)$

(4) $\det(A, B + B') = \det(A, B) + \det(A, B')$

(5) $\det(M) = \det(M^T)$

Remarquons que $\det(A, \lambda A) = \lambda \det(A, A) = \lambda 0 = 0$ car d'après (1) avec $A = B$, $\det(A, A) = -\det(A, A)$, donc $\det(A, A) = 0$.

2.1. **Déterminant d'une matrice 3x3.** Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Définition 2.3. *On appelle la quantité*

$$\det(M) = \det(A, B, C) \triangleq a_1 \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

le déterminant *de la matrice M.*

On montrera plus tard que $\det(A, B, C) = 0$ si et seulement si les vectuers-colonne A, B et C sont coplanaires (appartiennent au même plan dans $\mathbb{R}^3$.) En d'autres termes $\{A, B, C\}$ est une partie linéairement liée : l'un des trois vectuers est combinaison linéaire des deux autres. Ce résultat est l'analogue de la Proposition 2.1.
Un calcul élémentaire mais un peu long nous permet d'écrire la série d'égalités suivante :

$$\det(M) = + a_1 \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$= - b_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + b_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$= + c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

La série de propriétés suivantes est une conséquence immédiate de cette série d'égalités et des propriétés en dimension 2 énoncées à la Proposition 2.2.

Proposition 2.7 (Propriétés élémentaires de $\det(A, B, C)$)**.** *Pour toutes matrices-colonne A, A', B, B', C, C' et pour tous réels λ, μ et ν*

(1) *Inverser deux colonnes adjacentes change le signe. Par exemple :* $\det(A, C, B) = -\det(A, B, C)$ *et* $\det(B, A, C) = -\det(A, B, C)$

(2) $\det(\lambda A, \mu B, \nu C) = \lambda\mu\nu \det(A, B, C)$

(3)
- $\det(A + A', B, C) = \det(A, B, C) + \det(A', B, C)$
- $\det(A, B + B', C) = \det(A, B, C) + \det(A, B', C)$
- $\det(A, B, C + C') = \det(A, B, C) + \det(A, B, C')$

Proposition 2.8. *Pour tous vecteurs-colonne A, B et C*

(1) $\det(A, B, B) = \det(B, A, B) = \det(B, B, A) = 0$

(2) *si A, B et C sont coplanaires alors* $\det(A, B, C) = 0$.

La réciproque de (2) est délicate à prouver, nous la montrerons plus tard.

Démonstration. Le point (1) est immédiat.
Montrons l'assertion directe de (2). Supposons que C est combinaison linéaire de A et B : il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $C = \lambda A + \mu B$. Alors, $\det(A, B, C) = \det(A, B, lambdaA + \mu B) = \lambda \det(A, B, A) + \mu \det(A, B, B) = 0$. La preuve est analogue si ce sont A ou B qui sont combinaisosns linéaires des autres vecteurs. $\square$

Par un calcul direct, on obtient la

Proposition 2.9. *pour toute matrice 3x3 M,*

$$\det(M) = \det(M^T)$$

où M^T désigne la matrice transposée de M.

Ce résultat nous permet de calculer $\det(M)$ à l'aide de développements le long des lignes de M, plutôt que le long des colonnes de M comme cela était fait en (2.4), (2.5) et (2.6). C'est-à-dire

$$\det(M) = +a_1 \det\begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_1 \det\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + c_1 \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$= -a_2 \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + b_2 \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} - c_2 \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$= +a_3 \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} - b_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} + c_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

En effet, (2.10) correspond au développement le long de la première colonne de M^T qui s'obtient en appliquant la formule (2.4) à la matrice M^T au lieu de M. De même pour les les formules (2.11) et (2.12) que l'on appelle les développements suivant les deuxième et troisième lignes de M.
Maintenant, en privilégiant la notation de M suivant ses lignes :

$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ avec $L_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ et $L_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ on obtient les propriétés suivantes, en appliquant la Proposition 2.7 à la matrice transposée.

Proposition 2.13 (Propriétés élémentaires de $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$). *Pour toutes matrices-ligne $L_1, L_1', L_2, L_2', L_3, L_3'$ et pour tous réels λ, μ et ν*

(1) *Inverser deux lignes adjacentes change le signe.*
Par exemple : $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ *et* $\det \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$

(2) $\det \begin{pmatrix} \lambda L_1 \\ \mu L_2 \\ \nu L_3 \end{pmatrix} = \lambda\mu\nu \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$

(3)
- $\det \begin{pmatrix} L_1 + L_1' \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$
- $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 + L_2' \\ L_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2' \\ L_3 \end{pmatrix}$
- $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_3' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3' \end{pmatrix}$

Nous emploierons maintenant les notations $\det(M) = \det(C_1, C_2, C_3) = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ où C et L désignent les vecteurs-colonne et les vecteurs-ligne de M ainsi que la notation traditionelle

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.2. **Des exemples de calcul.**

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 2 \times (-3) \times 4.$

(2) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 8 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(a)}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{(b)}{=} (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) \times 4$ où les deux premières colonnes ont été inversées en (a) et les deux dernières en (b).

(3) $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 303 \end{vmatrix} = \det(A+B, A+2B, A+3B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or, $\det(A+B, A+2B, A+3B) = \det(A, A, A) + \det(A, A, 3B) + \det(A, 2B, A) + \det(A, 2B, 3B) + \det(B, A, A) + \det(B, A, 3B) + \det(B, 2B, A) + \det(B, 2B, 3B) = 0.$

(4) $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 303 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} L+G \\ 2L+G \\ 3L+G \end{pmatrix}$ avec $L = (100, 100, 100)$ et $G = (1, 2, 3)$.
Or, $\det \begin{pmatrix} L+G \\ 2L+G \\ 3L+G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L \\ 2L \\ 3L \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L \\ 2L \\ G \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L \\ G \\ 3L \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L \\ G \\ G \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} G \\ 2L \\ 3L \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} G \\ 2L \\ G \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} G \\ G \\ 3L \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} G \\ G \\ G \end{pmatrix} = 0.$

(5) $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 303 \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, C_3 - C_2) = \det\left(C_1, C_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(C_1, C_2 - C_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(C_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0.$

On constate les *règles pratiques de calcul* suivantes :
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes diagonaux.
- Un déterminant change de signe lorsqu'on échange deux lignes ou deux colonnes *adjacentes*.
- Un déterminant ne change pas si l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des *autres* colonnes

– Un déterminant ne change pas si l'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des *autres* lignes
– Un déterminant ne change pas si l'on conserve une colonne C et si l'on ajoute aux *autres* colonnes des multiples de C.

Attention. En dimension 2 : $\det(\lambda M) = \lambda^2 \det(M)$, et en dimension 3 : $\det(\lambda M) = \lambda^3 \det(M)$.

2.3. **En dimension 2, le déterminant est une aire.** Nous allons montrer au Théorème 2.16 que la *valeur absolue* du déterminant de deux vecteurs A et B : $|\det(A, B)|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de vecteurs-coordonnées A et B.
Représentation graphique

Faisons une liste des propriétés élémnetaires que doit satisfaire la fonction $\mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ de $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ qui est l'aire du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. On doit avoir :

(1) Comportement par changement d'échelle : $\mathcal{A}(\lambda \overrightarrow{a}, \mu \overrightarrow{b}) = \lambda\mu\mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, pour tous λ, μ réels positifs.

(2) $\mathcal{A}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}) = \mathcal{A}(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}) + \mathcal{A}(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b})$ comme le suggère la représentation géométrique suivante

De même,

(3) $\mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}) = \mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1}) + \mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_2})$

(4) L'aire d'un parallélogramme aplati est nulle : $\mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$.

On déduit de ces propriétés élémentaires qu'une aire doit aussi satisfaire pour tous $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$, $0 = \mathcal{A}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + \mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \mathcal{A}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) + \mathcal{A}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = \mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \mathcal{A}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$. Donc, on a nécessairement

(5) $\mathcal{A}(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = -\mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

Il apparaît donc qu'il est nécessaire dans cette approche de considérer des *aires signées*, c'est-à-dire qui peuvent prendre des valeurs positives ou négatives selon les cas. En particulier, nous demanderons à $\mathcal{A}$ de satisfaire (1) pour tous les réels λ, μ (positifs ou négatifs).

Finalement, nous *imposons* la condition de normalisation suivante

(6) L'aire du parallélogramme construit sur la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, est choisie égale à l'unité, c'est-à-dire : $\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 1$.

Il se trouve que les fonctions de deux vecteurs qui satisfont les propriétés (1), (2), (3) et (5) ont un nom en mathématiques : ce sont des formes bilinéaires antisymétriques.

Définition 2.14 (Forme bilinéaire antisymétrique)**.** *On dit qu'un fonction* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est* bilinéaire *si pour tous les vecteurs* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a_1}, \dots$ *et tous les réels* λ, μ

- $f(\lambda\overrightarrow{a}, \mu\overrightarrow{b}) = \lambda\mu f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$
- $f(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}) + f(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b})$
- $f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}) = f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1}) + f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_2})$.

On dit qu'un fonction $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est* antisymétrique *si pour tous les vecteurs* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$

- $f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = -f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

Notons que nécessairement $f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$.

Nous allons maintenant chercher quelles sont *toutes* les $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinéaires et antisymétriques. Nous allons montrer qu'elles sont toutes multiples les unes des autres. Dons, si on en connaît une (non-nulle) on connaît toutes autres, qui sont ses multiples.

On se place dans la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ se décomposent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \overrightarrow{a} & = & a\overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_2}; & A = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{b} & = & b\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}; & B = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{2.15}$$

En appliquant les règles de calcul de la définition d'une forme bilinéaire antisymétrique, nous obtenons

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) &= f(a\overrightarrow{e_1}+\alpha\overrightarrow{e_2}, b\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2})\\
&= abf(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})+a\beta f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})+\alpha b f(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1})+\alpha\beta f(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})\\
&\overset{(a)}{=} (a\beta-\alpha b)f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})\\
&= \det(A,B)f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})
\end{aligned}$$

où en (a) nous avons utilisé : $f(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1})=-f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et $f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})=f(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})=0$. Nous venons de démontrer le résultat intéressant suivant

Théoreme 2.16. *Toutes les formes bilénéaires antisymétriques en dimension 2 sont de la forme*

$$f(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})\det(A,B)$$

où $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont donnés en (2.15).
En particulier, en tenant compte de la condition de normalisation (6)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) &= \det(A,B)\\
f(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) &= f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})\mathcal{A}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}).
\end{aligned}$$

2.4. **Dimension 2 : Interprétation de $\det(M)$ en terme d'aire.** Soient $M=\begin{pmatrix} a & b\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2)$ dont la matrice-coordonnées est $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. On note $m(\overrightarrow{x})=m(x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2})\triangleq x_1m(\overrightarrow{e_1})+x_2\overrightarrow{m(e_2)}$, pour tout $\overrightarrow{x}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec

$$\begin{aligned}
m(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{a} = a\overrightarrow{e_1}+\alpha\overrightarrow{e_2}=(a,\alpha)\\
m(\overrightarrow{e_2}) &= \overrightarrow{b} = b\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}=(b,\beta)
\end{aligned}$$

Remarquons que la matrice-coordonnées de $m(\overrightarrow{x})$ est MX. En posant

$$f(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\triangleq\mathcal{A}(m(\overrightarrow{x}),m(\overrightarrow{y})),\ \overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^2,$$

on vérifie facilement que f est bilinéaire et antisymétrique (le faire en exercice). Par conséquent, le Théorème 2.16 nous permet d'écrire que pour tous $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A}(m(\overrightarrow{x}),m(\overrightarrow{y}))=\mathcal{A}(m(\overrightarrow{e_1}),m(\overrightarrow{e_2}))\mathcal{A}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\det(M)\mathcal{A}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}). \tag{2.17}$$

On sait grâce à la Proposition 2.1 que pour toute *partie libre* $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$, on a $\mathcal{A}(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})\neq 0$. On peut alors écrire (2.17) sous la forme

$$\det(M)=\frac{\mathcal{A}(m(\overrightarrow{x}),m(\overrightarrow{y}))}{\mathcal{A}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})}=\mathcal{A}(m(\overrightarrow{e_1}),m(\overrightarrow{e_2}))$$

Proposition 2.18. *Pour tout couple de vecteurs non-colinéaires $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, le déterminant de M est le rapport entre l'aire signée du parallélogramme image par m construit sur $(m(\overrightarrow{x}), m(\overrightarrow{y}))$ et de l'aire signée du parallélogramme de départ construit sur $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$. En particulier, c'est l'aire signée du parallélogramme construit sur l'image par m de la base canonique.*

Puisque la matrice-coordonnées de $m(\overrightarrow{x})$ est MX, à l'aide du Théorème 2.16, la formule (2.17) se ré-écrit, pour tous vecteur-colonnes X et Y,

$$\det(MX, MY) = \det(M)\det(X, Y). \tag{2.19}$$

Exemples.

- On reprend la transformation résultant de changements d'échelle dans les différentes directions de la base canonique que nous avions rencontrée à la Section 1.3, mais seulement en dimension 2. La matrice de la transformation est $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Clairement, le volume de l'image du "carré canonique" : le parallélépipède de volume 1 construit sur $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, est un rectangle de volume $\lambda_1\lambda_2$. Or il se trouve que $\det(P) = \lambda_1\lambda_2$.
- Que dire des *rotations* planes rencontrées en Section 1.4 ? Par construction, l'aire de tout parallélépipède ne change pas lors d'une rotation. On doit donc avoir pour tout angle θ, $|\det(R(\theta))| = 1$. En fait nous avons
$$\det(R(\theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$
compte tenu de (1.11).

Revenons à la preuve d'un résultat général important.

Théoreme 2.20. *Pour toutes matrices carrées d'ordre 2 : M et N,*
$$\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(NM).$$
Attention, en général $MN \neq NM$.

Démonstration. On part de l'identité (2.19). Soit $N = (N_1\ N_2)$ la décomposition en colonnes de N. Puisque $MN = M(N_1\ N_2) = (MN_1\ MN_2)$, en utilisant (2.19) avec $X = N_1$ et $Y = N_2$, on a $\det(MN) = \det(MN_1, MN_2) = \det(M)\det(N_1, N_2) = \det(M)\det(N)$, qui est le résultat désiré. □

Le signe de $\det(A, B)$. Nous avons vu que la valeur absolue de $\det(A, B)$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs A et B. Mais que signifie le signe de $\det(A, B)$? Considérons la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On constate immédiatement que

S transforme la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ en la base inversée $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1})$. De plus $\det(S) = -1$ et pour tous vecteurs-colonne A et B, $(AB)S = (BA)$ (le vérifier en exercice). On a donc $\det(B, A) = \det((A, B)S) = \det(A, B)\det(S) = -\det(A, B)$. On retrouve un résultat maintenant bien connu. En fait $\det(A, B)$ est positif si l'angle *aigu* pour aller de $\overrightarrow{a}$ vers $\overrightarrow{b}$ est dans le même sens que celui de l'angle *aigu* pour aller de $\overrightarrow{e_1}$ à $\overrightarrow{e_2}$. Avec la représentation habituelle de la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, cet angle aigu est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Par contre, si l'angle aigu menant de $\overrightarrow{a}$ à $\overrightarrow{b}$ est dans le sens des aiguilles d'une montre, alors $\det(A, B)$ est négatif.

2.5. **Dimension 3 : Interprétation de** $\det(M)$ **en terme de volume.** On se place maintenant dans $\mathbb{R}^3$ et à l'instar de $\mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, on considère le volume $\mathcal{V}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.
Fixons $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c_o}$. On montre en géométrie que $\mathcal{V}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c_o}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{c_o}\mathcal{A}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de norme 1 orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{c_o}$ désigne le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{c_o}$.
Rep. Graphique

En fixant $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_o}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b_o}$, on obtient des formules analogues, d'où il vient que $\mathcal{V}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est une une forme 3-linéaire antisymétrique : elle partage les mêmes propriétés que $\det(A, B, C)$ obtenues aux Propositions 2.7 et 2.8. Exavtement comme à la Proposition 2.16 on montre que toute forme 3-linéaire antisymétrique est de la forme

$$f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})\mathcal{V}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}), \quad \text{pour tous } \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$$

avec $\mathcal{V}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \det(A, B, C)$ où A, B, C sont les vecteurs-coordonnées de $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ désigne la base canonique, pour laquelle on a imposé la condition de normalisation $\mathcal{V}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 1$. Avec un abus de notation, on a le

Théoreme 2.21. *Pour tous vecteurs-colonne X, Y, Z et toute matrice carrée M d'ordre 3*

$$\mathcal{V}(MX, MY, MZ) = \det(M)\mathcal{V}(X, Y, Z).$$

En particulier,

$$\det(M) = \mathcal{V}(M_1, M_2, M_3)$$

où M_1, M_2, M_3 sont les colonnes de M et pour toute matrice carrée N d'ordre 3

$$\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(NM).$$

Théoreme 2.22 (Conséquence pratique fondamentale)**.** *Soit M une matrice carrée, alors M est inversible si et seulement si* $\det(M) \neq 0$.

Démonstration. Notation : Z est le vecteur-coordonnées de $\overrightarrow{z}$. La matrice $M = (M_1\ M_2\ M_3)$ est inversible si et seulement si $M_1, M_2, M_3)$ est une partie libre. En effet $Y = MX = x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3$ de sorte que (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées de $\overrightarrow{y}$ dans la base $(\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3})$. On peut donc exprimer X en fonction de Y. Soit $X = M^{-1}Y$.
D'autre part, $(\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3})$ est une partie libre signifie qu'aucun des vecteurs $\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}$ n'est combinaison linéaire des deux autres, donc le volume du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3})$ est non-nul : ce parallélogramme n'est pas aplati. D'où il vient que $\mathcal{V}(\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}) \neq 0$, c'est-à-dire : $\det(\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}, \overrightarrow{m_3}) = \det(M) \neq 0$. □

2.6. **Généralisation en toute dimension.** Si nous sommes en dimension 3, le volume généralisé est le volume habituel. En dimension 2, c'est une aire. Le volume généralisé en dimension n admet pour unité L^n où L est l'unité de longueur de la dimension 1.
Il existe aussi une notion de déterminant en dimension n. Elle s'obtient par récurrence sur la dimension. Si la notion de déterminant en dimension $(n-1)$ est connue, on définit le déterminant de n vecteurs en dimension n à l'aide d'une formule du type développement suivant la première colonne (les coordonnées du premier vecteur) comme à la Définition 2.3 où l'on a obtenu une formule en dimension 3 à l'aide d'une combinaison linéaire de déterminants de dimension 2. Inutile de dire que l'on arrive à des formules très longues si on développe tout.
Ce qu'il faut retenir en dimension n, c'est que tous les résultats des dimension 2 et 3 se transportent. En particulier, pour toute matrice carrée M d'ordre n, la valeur absolue de $\det(M) = \det(M_1, \ldots, M_n)$ est le volume généralisé du parallélépipède généralisé construit sur les vecteurs-colonne de M : $(M_1, \ldots, M_n)$ et nous avons le

Théoreme 2.23. *Pour toute matrice carrée M d'ordre n, M est inversible si et seulement si* $\det(M) \neq 0$.