Correction de l'épreuve intermédiaire de mai 2009.

Exercice 1

Avec les notations du cours démontrer que la solution X du système linéaire $AX = b$ s'écrit avec $A = [U, V]$

$$X = \begin{bmatrix} X_U \\ X_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U^{-1}V \\ I_{n-m} \end{bmatrix} X_V.$$

On précisera la signification des différents termes $A, X, b, U, V, X_U, X_V, I_{n-m}$, on introduira les dimensions m et n et on rappellera l'hypothèse faite sur A.

Solution. La matrice A possède m lignes et n colonnes qui correspondent aux m égalités et n inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ du système $AX = b$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

La matrice du système est $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ et le membre de droite du système est $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

On fait l'hypothèse que $m \le n$ et que A est de rang plein. Ce qui équivaut à dire qu'il existe une sous-matrice U de A qui est carrée d'ordre m et inversible. Pour simplifier les notations on suppose ici que U correspond aux m premières colonnes de A : la base de coordonnées est $\{1, \dots, m\}$ et $A = [U, V]$ où V est une matrice $m \times (n - m)$. Puisque U est inversible, on peut multiplier à gauche les membres de l'égalité $AX = b$ par son inverse U^{-1}, ce qui, en notant $X = \begin{bmatrix} X_U \\ X_V \end{bmatrix}$ la décomposition de X en ses m premières coordonnées $X_U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et ses $n - m$ dernières coordonnées $X_V = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, nous donne

$$\begin{aligned} AX = b \quad & \Leftrightarrow \quad [U, V] \begin{bmatrix} X_U \\ X_V \end{bmatrix} = UX_U + VX_V = b \\ & \Leftrightarrow \quad X_U + U^{-1}VX_V = U^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad X_U = U^{-1}b - U^{-1}VX_V \end{aligned}$$

Par conséquent $X = \begin{bmatrix} X_U \\ X_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{-1}b - U^{-1}VX_V \\ X_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U^{-1}V \\ I_{n-m} \end{bmatrix} X_V$ où I_{n-m} désigne la matrice identité d'ordre $n - m$.

Il y a donc autant de solutions que de vecteurs X_V : l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension $n - m$. De plus, en prenant $X_V = 0$ il apparaît que $\begin{bmatrix} U^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution particulière du système. On l'appelle la solution de base $\{1, \dots, m\}$ puisque la sous-matrice principale U que nous avons prise ici correspond aux coordonnées $\{1, \dots, m\}$. Si la matrice principale que nous choisissons correspond à d'autres coordonnées $\{j_1, \dots, j_m\}$ que les m premières, cette solution est dite de base $\{j_1, \dots, j_m\}$. On devra prendre garde à placer des zéros sur les coordonnées hors-base, c'est-à-dire autres que $j_1, \dots, j_m$.

Exercice 2

On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

(a) Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions ?

(b) Montrer qu'il n'y a que deux bases de coordonnées qui permettent de résoudre le système.

(c) Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot pour la base $\{1, 2\}$.

(d) Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot pour l'autre base.

Solution. On se servira des résultats de la question de cours précédente. Pour ce système nous avons $n = 3, m = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) On constate que la sous-matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ de base $\{1, 2\}$ est inversible puisque son déterminant qui vaut 5 n'est pas nul. Par conséquent A est rang plein et la dimension de l'espace des solutions est $n - m = 3 - 2 = 1$: c'est une droite affine.

(b) Il y a a priori $\binom{3}{2} = 3$ bases de coordonnées possibles : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$. On calcule les déterminants correspondants et on note que celui pour $\{1, 3\}$ est nul alors que celui pour $\{2, 3\}$ ne l'est pas. Les bases de coordonnées sont donc $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$.

(c) Méthode du pivot pour la base de coordonnées $\{1, 2\}$. Il s'agit de faire apparaître la matrice identité dans les colonnes 1 et 2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 9/5 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -11/5 \\ 0 & 1 & 0 & 9/5 \end{bmatrix}$$

Les étapes sont les suivantes : (1) : $L_2 - 2L_1$, (2) : $L_2/5$, (3) : $L_1 + L_2$.
En appliquant le résultat de l'exercice 1, on voit que les solutions sont

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/5 \\ 9/5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où x_3 décrit l'ensemble des nombres réels.

(d) Méthode du pivot pour la base de coordonnées $\{2, 3\}$. Il s'agit de faire apparaître la matrice identité dans les colonnes 2 et 3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 & -11 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0,5 & 0 & 1 & -1,1 \end{bmatrix}$$
$$\overset{(4)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1,8 \\ 0,5 & 0 & 1 & -1,1 \end{bmatrix}$$

Les étapes sont les suivantes : (1) : $-L_1$, (2) : $L_2 - 3L_1$, (3) : $L_2/10$, (4) : $L_1 + 2L_2$.
En appliquant le résultat de l'exercice 1, on voit que les solutions sont

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,8 \\ -1,1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

où x_1 décrit l'ensemble des nombres réels.

Exercice 3

Vous voulez apporter à votre grand-mère un bouquet de 9 marguerites, 6 tulipes et 12 roses. Mais vous vous y prenez trop tard, tous les fleuristes sont fermés et il ne reste plus qu'un marchand de fleurs dans le métro qui propose deux types de bouquets et qui ne vend pas les fleurs à l'unité. Le bouquet 1 qui est composé de 3 marguerites, 1 tulipe et 1 rose, coûte 1 euro ; le bouquet 2 qui est composé de 1 marguerite, 1 tulipe et 4 roses coûte 2 euros.

(a) Écrire le programme linéaire correspondant à la minimisation du coût d'achat des bouquets qui vous permettront de composer le bouquet de votre grand-mère. On notera x_1 et x_2 les nombres de bouquets de type 1 et 2 que vous allez acheter.

(b) Le résoudre graphiquement. *On calculera pour cela les pentes de certaines droites.*

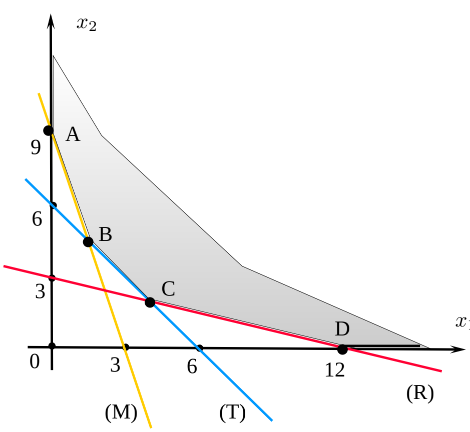
(c) Le prix du bouquet 1 étant encore de 1 euro, à partir de quel prix du bouquet 2 n'auriez-vous acheté que des bouquets 1 ?

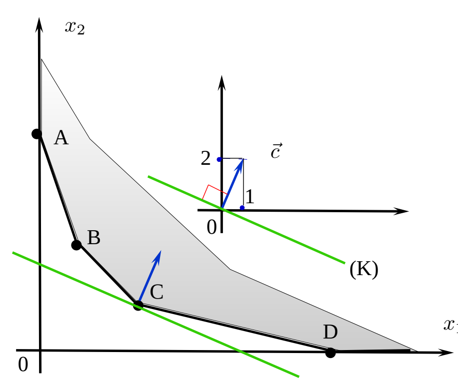
Solution.

(a) Puisque j'achète x_1 bouquets 1 et x_2 bouquets 2 qui coûtent respectivement 1 et 2 euros l'unité, je paye $x_1 + 2x_2$ euros. Je cherche donc à minimiser le coût $x_1 + 2x_2$.
Compte tenu de la composition des bouquets 1 et 2, ce faisant j'achèterai :
(M) $3x_1 + x_2$ marguerites,
(T) $x_1 + x_2$ tulipes et
(R) $x_1 + 4x_2$ roses.
De plus, je désire acheter *au moins* 9 marguerites, 6 tulipes et 12 roses pour composer mon bouquet. Le programme linéaire que je dois résoudre est donc

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x_1 + 2x_2 \\ \text{slc} & \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & x_2 & \geq & 9 & (M) \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 6 & (T) \\ x_1 & + & 4x_2 & \geq & 12 & (R) \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

(b) Le graphique de gauche représente le polyèdre des solutions réalisables. C'est la région grisée délimitée par les droites (M), (T) et (R) d'équations $\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & x_2 & = & 9 & (M) \\ x_1 & + & x_2 & = & 6 & (T) \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 12 & (R) \end{array} \right.$ et les axes de coordonnées.





Noter que les limites supérieures de la région grisée ne correspondent pas aux frontières du polyèdre réalisable qui est une région non bornée.

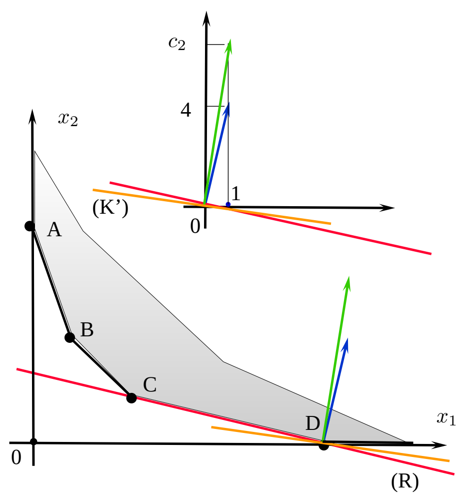
Le vecteur du graphique de droite est le vecteur de coût $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, il indique la direction de croissance maximale de la fonction de coût $x_1 + 2x_2$ à optimiser. La droite (K) qui lui est perpendiculaire donne la direction des droites de coût constant. Lorsqu'on déplace une droite parallèle à

(K) dans la direction du vecteur de plus grande pente $\vec{c}$, le coût augmente. Par conséquent, c'est en approchant une droite parallèle à (K) par le bas (puisque $\vec{c}$ pointe vers le haut) qu'on obtient le coût minimal. Le point C est le premier point du polyèdre des solutions réalisables que cette droite mobile rencontre, c'est donc la solution de notre programme linéaire.

Pour s'assurer que c'est bien le point C qui est le premier point de contact, nous devons calculer les pentes des différentes droites. Nous obtenons : pente(M)$=-3$, pente(T)$=-1$, pente(R)$=-1/4$ et pente(K)$=-1/2$. Puisque, pente(T)$<$pente(K)$<$pente(R), la plus basse des droites de coût constant (qui correspond au coût minimal que nous cherchons à déterminer) touche le polyèdre des solutions réalisables au point C, intersection des droites (T) et (R). La solution de notre programme est donc donnée par les coordonnées de C, solution de $\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 6 \quad (T) \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 12 \quad (R) \end{array} \right.$.
C'est-à-dire $x_1 = 4, x_2 = 2$.

J'achète donc 4 bouquets 1 et 2 bouquets 2. Je paye $4 \times 1 + 2 \times 2 = 8$ euros. Une fois mon bouquet composé, il me reste 5 marguerites en trop.

(c) Le point de la frontière du polyèdre réalisable qui correspond à l'abandon de l'achat de bouquet 2 est le point D.



On voit que la pente limite est celle de la droite (R), c'est-à-dire $-1/4$. La pente de la droite (K') de coût constant pour le vecteur de coût $(1, c_2)$ est $-1/c_2$. La condition que nous cherchons est donc $-1/c_2 \geq -1/4$. Soit $c_2 \geq 4$. Si les bouquets 2 coûtent plus de 4 euros, la meilleure stratégie est de n'acheter que des bouquets 1.

Un commentaire général

Les méthodes du simplexe révisée et du simplexe en deux phases sont deux notions distinctes.

- La *méthode de calcul (du simplexe) révisée* est simplement une façon d'écrire les calculs lorsqu'on effectue l'algorithme. On introduit les calculs $\lambda = c_U U^{-1}, r_V = c_V - \lambda V, y = U^{-1}a$ de façon à ne pas effectuer la méthode du pivot sur des grands tableaux qui nécessitent de nombreux calculs inutiles.
- La *méthode du simplexe en deux phases* est nécessaire lorsque le tableau initial du simplexe ne se laisse pas mettre sous forme canonique. La phase 1 où des variables et un coût artificiels sont introduits permet dans un premier temps de trouver un tableau qui se met sous forme canonique. Une fois ce tableau calculé, on supprime les variables et le coût artificiels et on peut démarrer l'algorithme du simplexe avec le coût effectif. C'est ce qu'on appelle la phase 2.
- On peut effectuer les calculs des phases 1 et 2 à l'aide la méthode du simplexe habituelle ou à l'aide de la méthode révisée, à notre convenance.

Dans l'exercice 4, nous effectuerons la méthode en deux phases à l'aide de l'algorithme habituel (non révisé). Dans l'exercice 5, nous calculerons à l'aide l'algorithme révisé ; il se trouve que la phase 1 sera inutile dans cet exercice.

Exercice 4

On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & 2x_1 + x_2 \\ \text{slc} & \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & +4x_2 & \geq & 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array} \right. \end{array}$$

(a) L'écrire sous forme standard.

(b) Effectuer la phase 1 de la méthode du simplexe en introduisant une seule variable artificielle.

(c) En déduire une solution de base réalisable.

(d) Résoudre le programme linéaire à l'aide de la méthode du simplexe.

(e) Quelle est la valeur maximale de ce programme ?

Solution.

(a) On transforme la maximisation en une minimisation et on introduit les deux variables d'écart x_3 et x_4 pour obtenir le programme linéaire standard suivant

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & -2x_1 - x_2 \\ \text{slc} & \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +4x_2 & -x_4 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & & & \end{array} \right. \end{array}$$

(b) Le tableau initial est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il ne se laisse pas mettre à première vue sous forme canonique en raison du -1 qui est apparu avec la variable d'écart x_4. On doit donc effectuer la phase 1 pour trouver un tableau qui permettra le démarrage de l'algorithme du simplexe. On introduit une seule variable artificielle x_5 car il n'y a qu'un seul -1. Le tableau initial de la phase 1, qu'on pourrait appelé tableau initial artificiel est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Noter qu'on met les 1 artificiels dans la dernière ligne et sur la même ligne que -1 à l'intérieur du tableau.

Effectuons l'algorithme du simplexe avec le calcul normal (non révisé) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 11/4 \\ 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les étapes sont les suivantes : (1) : on met le tableau sous forme canonique en faisant $L_3 - L_1$, (2) : le coût relatif -4 est négatif, on voit que les rapports $3/1 > 1/4$, donc on pivote sur la coordonnée (2,2), on commence par $L_2/4$, (3) : puis on fait $L_1 - L_2$ et $L_3 + L_2/4$.

L'algorithme s'achève puisque dans le dernier tableau qui est sous forme canonique, tous les coûts relatifs sont positifs ou nuls.

(c) Du fait que le coût qui se lit dans la case en bas à droite est nul, on en déduit qu'une solution de base réalisable est obtenue avec $x_3 = 11/4$ et $x_2 = 1/4$. Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1/4, 11/4, 0)$

(d) Il s'agit ici de poursuivre avec la phase 2. On part donc du tableau issu de la phase 1, en effaçant la colonne 5 artificielle et en introduisant le coût effectif :

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1 & 1/4 & 11/4 \\ 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Effectuons l'algorithme du simplexe avec le calcul normal (non révisé) :

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1 & 1/4 & 11/4 \\ 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1 & 1/4 & 11/4 \\ 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ -7/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$
$$\begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1 & 1/4 & 11/4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ -7/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Les étapes sont les suivantes : (1) : on met le tableau sous forme canonique en faisant $L_3 + L_2$, (2) : le coût relatif -7/4 est négatif, on voit que les rapports $(11/4)/(3/4)$=11/3 $>$ $(1/4)/(1/4)$=1, donc on pivote sur la coordonnée (2,1), on commence par $4L_2$, (3) : puis on fait $L_1 + 3/4L_2$ et $L_3 + 7/4L_2$, (4) : le coût relatif -2 est négatif et la seule coordonnée positive au-dessus est la première, on pivote donc autour de la coordonnée (1,4), pour cela on effectue $L_2 + L_1$ et $L_3 + 2L_1$.

L'algorithme s'achève puisque dans le dernier tableau qui est sous forme canonique, tous les coût relatifs sont positifs ou nuls.

Il correspond à la solution optimale de base $x_1^* = 3, x_2^* = x_3^* = 0, x_4^* = 2$.

La solution optimale effective est $(x_1^*, x_2^*) = (3, 0)$.

On constate que les variables d'écart sont $x_3^* = 3 - (x_1^* + x_2^*) = 3 - 3 = 0$ et $x_4^* = (x_1^* + 4x_2^*) - 1 = 3 - 1 = 2$.

(e) On lit la valeur *maximale* en bas à droite du dernier tableau : 6. On peut aussi vérifier que $2x_1^* + x_2^* = 2 \times 3 = 6$.

Exercice 5

On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & x_1 \\ \text{slc} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

(a) L'écrire sous forme standard.

(b) Le résoudre à l'aide de la méthode du simplexe révisée.

(c) Maximiser $x_1 + x_2$ sous les mêmes contraintes que précédemment à l'aide de la méthode du simplexe révisée. *On pourra se servir des calculs déjà effectués à la question (b) pour gagner du temps.*

Rappel : $\lambda = c_U U^{-1}, r_V = c_V - \lambda V, y = U^{-1}a$.

Solution.

(a) On transforme la maximisation en une minimisation et on introduit les deux variables d'écart x_3 et x_4 pour obtenir le programme linéaire standard suivant

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & -x_1 \\ \text{slc} & \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +3x_2 & +x_4 & = & 4 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

(b) Le tableau initial est

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

On constate que le tableau est sous forme canonique, la phase 1 de l'algorithme du simplexe est donc inutile. On passe immédiatement à la phase 2. On démarre l'algorithme avec les coordonnées de base 3 et 4 qui correspondent à la matrice identité $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ dans le tableau. Clairement $U^{-1} = I$ et $y_0 = U^{-1}a_0 = Ia_0 = a_0 = b$: la dernière colonne de la matrice de contraintes $[A, b] = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_0] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Nous démarrons donc l'algorithme avec le tableau révisé suivant

	U^{-1}		y_0	$y_?$
x_3	1	0	3	
x_4	0	1	4	

De façon à savoir quelle coordonnée va rentrer dans le tableau à la place du point d'interrogation, on calcule les coûts relatifs à l'aide des formules $\lambda = c_U U^{-1}, r_V = c_V - \lambda V$. Nous avons $c_U = (c_3, c_4) = (0, 0)$ et $V = [a_1\ a_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$: la sous-matrice de A correspondant aux coordonnées hors-base : 1 et 2. Donc, $\lambda = (0, 0)$ et

$$r_V = (c_1, c_2) - \lambda V = (-1, 0) - (0, 0) = (-1, 0). \tag{2}$$

Le coût relatif -1 est négatif, il correspond à la coordonnée 1. On la fait donc rentrer. Pour cela on calcule $y_? = y_1 = U^{-1}a_1 = Ia_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce qui donne le tableau

	U^{-1}		y_0	y_1	
x_3	1	0	3	2	3/2
x_4	0	1	4	1	4/1=4

où les nombres de la dernière colonne sont les rapports des coordonnées de y_0 et y_1. Le plus petit de ces rapports est $3/2$, qui est sur la première ligne : c'est donc la coordonnée 3 qui, se trouvant sur cette ligne, va laisser sa place à la coordonnée 1. Pour cela, on effectue un algorithme du pivot sur la case (1,4) du tableau :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1 & 5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

où l'on a fait successivement (1) : $L_1/2$ et (2) : $L_2 - L_1$. On réactualise notre tableau :

$$\begin{array}{c|cccc|} & U^{-1} & & y_0 & y_? \\ \hline x_1 & 1/2 & 0 & 3/2 & \\ x_4 & -1/2 & 1 & 5/2 & \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

Calculons les coûts relatifs. Nous avons maintenant $c_U = (c_1, c_4) = (-1, 0)$ et $V = [a_2\ a_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $\lambda = (-1, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (-1/2, 0)$ et

$$r_V = (c_2, c_3) - \lambda V = (0, 0) - (-1/2, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2) \geq 0. \tag{4}$$

Les coûts relatifs sont positifs ou nuls, l'algorithme s'achève donc avec la solution $x_1 = 3/2, x_4 = 5/2$ et les coordonnées hors-base $x_2 = x_3 = 0$. Notre solution optimale est $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (3/2, 0, 0, 5/2)$.
En oubliant les variables d'écart, la solution optimale du programme linéaire de la question est donc : $x_1^* = 3/2, x_2^* = 0$.

(c) Le tableau initial est

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il diffère du tableau (1) de la question précédente uniquement par la présence de $c_2 = -1$ à la place de $c_2 = 0$. La première apparition de c_2 dans la question (b) se fait à l'équation (2). Donc les premiers calculs sont inchangés. Calculons r_V avec $c_2 = -1$. Nous obtenons

$$r_V = (c_1, c_2) - \lambda V = (-1, -1) - (0, 0) = (-1, -1).$$

Les deux coûts relatifs étant négatifs, on peut faire rentrer n'importe laquelle des coordonnées hors-base. Nous décidons de faire rentrer 1, comme dans la question précédente, pour profiter des calculs qui ont déjà été effectués. On poursuit donc exactement comme dans la question (b) jusqu'à une nouvelle apparition de c_2. Ceci arrive en (4) qui doit être modifié avec $c_2 = -1$ comme suit

$$r_V = (c_2, c_3) - \lambda V = (-1, 0) - (-1/2, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (-1/2, 1/2).$$

Le coût relatif correspondant à la coordonnée 2 étant négatif, cette coordonnée rentre dans la nouvelle base. On doit donc calculer y_2 pour compléter le tableau (3) : $y_2 = U^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$. On actualise le tableau :

$$\begin{array}{c|cccc|l} & U^{-1} & & y_0 & y_2 & \\ \hline x_1 & 1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 & (3/2)/(1/2)=3 \\ x_4 & -1/2 & 1 & 5/2 & 5/2 & (5/2)/(5/2)=1 \\ \cline{1-5} \end{array}$$

Puis on effectue un tour de pivot autour de la coordonnée (2,4) :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 5/2 & 5/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ -1/5 & 2/5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et on réactualise le tableau

	U^{-1}		y_0	$y_?$
x_1	3/5	-1/5	1	
x_2	-1/5	2/5	1	

Calculons les coûts relatifs. Avec $c_U = (c_1, c_2) = (-1, -1)$ et $V = [a_3\ a_4] = I$, nous obtenons $\lambda = (-1, -1)\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = (-2/5, -1/5)$ et $r_V = (c_3, c_4) - \lambda V = (0, 0) - (-2/5, -1/5)I = (2/5, 1/5) \geq 0$. Les coûts relatifs étant positifs, l'algorithme s'arrête.
Nous avons obtenu la solution optimale $x_1^* = x_2^* = 1$ et $x_3^* = x_4^* = 0$.