

Feuille d'exercices

Exercice 1. Résoudre chacun des systèmes suivants à l'aide de la méthode du pivot.

$$(a) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y - z + 3t = 5 \\ 2x - y + 2z + t = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y - z + 2t = 3 \\ 2x + 4y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 6x + 3y - 2z = 1 \\ 9x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 6x + 3y - 2z = 1 \\ 9x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

Exercice 2. On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 3t = 4 \\ x + 2y - z + 4t = 1 \\ 3x + 6y + 11t = 6 \end{cases} \quad (1)$$

1. Pivot de Gauss.

(a) Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauss. Quelles sont les *équations et les inconnues principales*? Ce système admet-il une solution?

(b) Mêmes questions lorsqu'on remplace le second membre $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Écrire la solution du système (1) comme la somme d'une solution particulière et de la solution du système homogène. Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions?

2. Résolution matricielle

(a) Écrire le système sous forme matricielle $AX = b$.

(b) Quel est le *rang de A*? Se ramener au système constitué des seules équations principales qu'on écrira sous la forme $[U, V] \begin{pmatrix} X_U \\ X_V \end{pmatrix} = b$.

(c) Vérifier que x, y n'est pas une "base".

(d) Montrer que x, t est une base. Écrire les matrices U et V correspondantes (avec les notations du cours). Calculer U^{-1} .

(e) En déduire la solution du système (1) à l'aide de la formule du cours

$$X_U = U^{-1}b - U^{-1}VX_V.$$

Retrouver ainsi les résultats déjà obtenus.

Exercice 3. Résoudre graphiquement les problèmes de programmation linéaire suivants.

$$(a) \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & 3x + 4y \\ \text{s.l.c.} & \begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ 3x + 3y \leq 15 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & x + 2y \\ \text{s.l.c.} & \begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & 2x + 3y \\ \text{s.l.c.} & \begin{cases} x + 3y \leq 6 \\ 2x + y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Dans ce livret d'exercices, l'unité monétaire est le \mathcal{U} (doublezon).

Exercice 4. Résolution graphique.

Une entreprise produit deux biens, appelés **a** et **b**, en quantité journalière x et y . La production de chaque bien nécessite la fabrication de pièces distinctes dans deux ateliers spécialisés (on ne prend pas en compte l'assemblage des deux types de pièces). On peut penser, parmi nombre d'exemples, à une entreprise fabriquant des lampes de deux types, un atelier de main d'œuvre produisant des abat-jours tandis que l'atelier "machines" produit les pieds et ampoules. Une unité du bien **a** (lampe "design") nécessite 1 heure d'usinage dans l'atelier 1 et 3 heures dans l'atelier 2. Une unité du bien **b** (lampe "tradition") nécessite 4 heures d'usinage dans l'atelier 1 et 3 heures dans l'atelier 2. Les capacités de production des deux ateliers sont respectivement de 8 et 15 heures. Les prix de vente unitaires sont de $30 \mathcal{U}$ pour le bien **a** et $70 \mathcal{U}$ pour le bien **b**. Les coûts variables (matières premières, électricité, etc...) unitaires s'élèvent à $10 \mathcal{U}$ et $20 \mathcal{U}$ respectivement.

- (a) Écrire le programme linéaire correspondant à la maximisation de la marge totale sous les contraintes de production envisagées.
- (b) Le résoudre graphiquement : on tracera le domaine des plans de production et on déterminera les droites isomarges.
On calculera le plan de production optimal, la marge optimale ainsi que les durées d'occupation des ateliers correspondant à cette solution optimale.
- (c) L'entreprise fait face à une évolution de la conjoncture économique entraînant un changement des marges unitaires en $\alpha \mathcal{U}$ et $\beta \mathcal{U}$ respectivement pour les produits **a** et **b**. Déterminer le nouvel optimum en fonction des valeurs de α et β .
On calculera aussi la marge optimale et les durées d'occupation des ateliers correspondant à la solution optimale.
- (d) L'entreprise cherche à déterminer une meilleure stratégie de production. Pour cela, elle envisage d'augmenter la capacité de production de l'atelier 1 (main d'œuvre) à 11 heures. Après négociation avec les salariés, cette augmentation crée un surplus de coûts fixes (salaires, ...) de $20 \mathcal{U}$. Cette nouvelle stratégie est-elle profitable ?

Exercice 5. Résolution graphique.

Lors d'une campagne publicitaire, on dit qu'un contact publicitaire est établi chaque fois qu'une personne voit et/ou entend un message publicitaire.

Le responsable de la publicité d'une entreprise de boissons envisage le lancement à l'échelle nationale d'une nouvelle marque. Étant donnés les arguments publicitaires qu'il a décidé d'utiliser, une étude de marché lui a appris que le succès de sa campagne serait assuré s'il parvenait à établir au moins 6 millions de contacts publicitaires avec les moins de 30 ans, 6 millions avec les femmes de plus de 30 ans et 8 millions avec les hommes de plus de 30 ans.

Deux média peuvent être utilisés pour transmettre les messages publicitaires : la radio et la télévision.

Un message radiophonique assure un auditoire de 400 000 moins de 30 ans, 200 000 femmes de plus de 30 ans et 200 000 hommes de plus de 30 ans, et ce pour un tarif de $20\,000 \mathcal{U}$. Un message télévisuel assure quant à lui d'établir 200 000 contacts avec les moins de 30 ans, 400 000 avec les femmes de plus de 30 ans et 700 000 avec les hommes de plus de 30 ans. Et ce pour un tarif de $70\,000 \mathcal{U}$ le message.

- (a) Le responsable cherchant à assurer le succès de sa campagne au plus bas prix, formaliser le problème posé en un programme linéaire (on précisera les variables, la fonction objectif à optimiser ainsi que les contraintes sur les variables).
- (b) Résoudre le programme graphiquement (on décrira l'ensemble des contraintes dans un premier temps). Commenter les résultats obtenus.
- (c) On suppose le prix du message télévisé variable. A l'aide du graphique, décrire en fonction de ce prix la solution du problème posé.
- (d) On veut évaluer la sensibilité du coût de la campagne aux variations du nombre d'hommes de plus de 30 ans sujets à contact publicitaire pour assurer le succès de la campagne. On considère ce nombre comme un paramètre a . Graphiquement, calculer le coût $C(a)$ de la campagne publicitaire vu comme une fonction de a .

- (e) Que vaudrait le coût $\tilde{C}(b)$, b représentant le nombre de moins de 30 ans, au voisinage de $b = 6$ millions ?

Exercice 6. Résolution graphique.

Un atelier de confection dispose de 70 mètres de coton, 52.50 mètres de laine et 35 mètres de soie. La fabrication d'un complet nécessite 1 mètre de coton, 1 mètre de laine et 0.25 mètre de soie. Celle d'une robe nécessite 1 mètre de coton, 0.5 mètre de laine et un mètre de soie. Un complet se vend 160 U et une robe 100 U .

- (a) Écrire le programme linéaire correspondant à la maximisation du revenu. On notera x et y respectivement, les nombres de complets et de robes que l'atelier produit.
- (b) Le résoudre graphiquement. *On calculera pour cela les pentes de certaines droites.* On précisera
- (i) la solution exacte,
 - (ii) le revenu maximal,
 - (iii) les quantités utilisées de coton, laine et soie.
- (c) Le prix d'une robe étant encore de 100 U ,
- (i) à partir de quel prix du complet est-il rentable d'abandonner la confection des robes ?
 - (ii) en-dessous de quel prix du complet est-il rentable d'abandonner la confection des complets ?

Exercice 7. Résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe les programmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{(a) Maximiser} & 2x + 3y \\ \text{s.l.c.} & \begin{cases} x + 3y \leq 6 \\ 2x + y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(b) Maximiser} & x + 4y \\ \text{s.l.c.} & \begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + 2y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 8. Résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe les programmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{(a) Maximiser} & 3x + y + 2z \\ \text{s.l.c.} & \begin{cases} x + y + z \leq 20 \\ 5x - y \leq 10 \\ 2x + z \leq 15 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(b) Maximiser} & x + 2y + z \\ \text{s.l.c.} & \begin{cases} x + z \leq 2 \\ 2x + y \leq 3 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 9. Choix parmi trois techniques.

Une entreprise peut fabriquer un même bien selon trois techniques de production en utilisant les services d'une même machine et de la main d'œuvre. Produire une unité de bien nécessite 0,5 heure de machine et 2 heures de main d'œuvre pour la première technique, 1,5 heures de machine et 1,5 heures de main d'œuvre pour la deuxième technique et enfin 2 heures de machine et 0,5 heure de main d'œuvre pour la troisième technique. On suppose que la capacité d'usinage de la machine est de 12 heures et que le nombre d'heures de travail de main d'œuvre disponibles est de 15 heures.

L'entreprise cherche à maximiser sa marge sur coûts variables. Les marges unitaires sont de 3 U , 4 U et 5 U respectivement selon que le bien est produit à l'aide de la première, deuxième ou troisième technique.

1. Si l'on appelle x, y, z les quantités de biens fabriqués selon chaque technique, écrire le programme linéaire correspondant au problème envisagé. Le mettre sous forme standard. Quelle est la dimension de la variété linéaire dans laquelle se trouve le simplexe des solutions réalisables ?
2. Résoudre numériquement le programme linéaire en utilisant l'algorithme du simplexe. Pour cela, on partira du sommet obtenu en prenant les variables d'écart comme variables de base.
3. Comment prendre en compte que l'on désire satisfaire au moins une demande de 10 unités ? Cela modifie-t-il la solution précédente ?

Exercice 10. À l'aide de la phase 1 de l'algorithme du simplexe, trouver une solution de base réalisable de chacun des systèmes linéaires suivants.

$$(a) \begin{cases} x + 3y - u = 6 \\ 2x + y - v = 2 \\ x, y, u, v \geq 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + u = 2 \\ 5x - y - v = 1 \\ x, y, u, v \geq 0 \end{cases} .$$

Exercice 11. Résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe les programmes linéaires suivants.

$$(a) \begin{array}{l} \text{Minimiser } x + 3y \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} x + 2y \geq 30 \\ x + 4y \geq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (b) \begin{array}{l} \text{Minimiser } 3x + y + 2z \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} x + y + z \geq 20 \\ 5x - y + z \leq 10 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (c) \begin{array}{l} \text{Minimiser } 10x + 30y \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 6x + y \geq 6 \\ y \geq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 12. Résoudre les programmes linéaires suivants graphiquement et par la méthode du simplexe.

$$(a) \begin{array}{l} \text{Minimiser } 2x + y \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (b) \begin{array}{l} \text{Maximiser } x - y \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} x + 3y \geq 1 \\ 2x + y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (c) \begin{array}{l} \text{Minimiser } x - y \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} x + 3y \geq 1 \\ 2x + y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 13. *Optimum infini, dégénérescence.*

Résoudre les programmes linéaires suivants graphiquement et par la méthode du simplexe.

$$(a) \begin{array}{l} \text{Maximiser } x \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} x - y \leq 1 \\ -x + y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (b) \begin{array}{l} \text{Maximiser } y \\ \text{s.l.c. } \begin{cases} -x + y \leq 0 \\ x \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 14. *Maximisation de marge et prix duaux : politique à moyen terme.*

Une entreprise produit deux biens a et b en quantité x et y . Ces productions font intervenir deux facteurs fixes. D'une part, l'emploi de main d'œuvre dont la quantité journalière disponible s'élève à un cumul de $b_1^{(0)} = 200$ heures. D'autre part, l'utilisation d'équipements (machines) dont la capacité de production cumulée est de $b_2^{(0)} = 100$ heures. La production d'une unité du bien a nécessite 2 heures de main d'œuvre mais n'utilise pas les équipements tandis que la fabrication d'une unité du bien b utilise 1 heure de main d'œuvre et 1 heure de machines. Les marges unitaires sont de 15 € et 10 € respectivement. L'entreprise veut améliorer sa stratégie de production en jouant sur les quantités disponibles des deux facteurs de production et déterminer quelles évolutions seraient profitables.

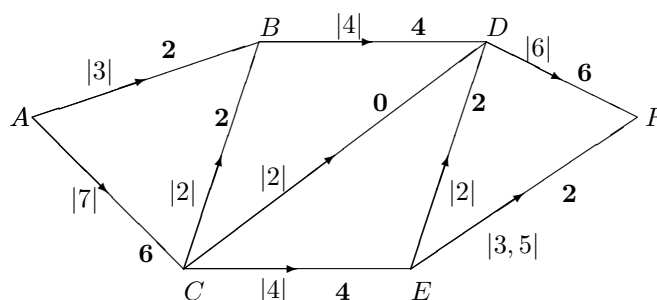
1. Écrire le programme linéaire correspondant.
2. Déterminer graphiquement l'optimum.
3. Calculer les prix duaux de deux manières : par un calcul direct et en utilisant les conditions d'optimalité.
4. Dans quel domaine peuvent varier les capacités de production b_1 et b_2 pour que ces prix duaux restent inchangés ? Que se passe-t-il en frontière de ce domaine ?
5. Partant de l'état initial $(b_1^{(0)}, b_2^{(0)}) = (200, 100)$, on envisage deux directions de développement. La première consiste à augmenter la main d'œuvre disponible b_1 avec une capacité de production des équipements $b_2 \equiv b_2^{(0)}$ fixe. La seconde à augmenter la capacité de production b_2 tout en conservant la main d'œuvre disponible constante.
Comment évolue, dans les deux cas, la marge optimale dans les limites où la structure de production reste inchangée ?
6. Si le prix d'usage des équipements servant à la fabrication du bien b est $p_2 = 2 \text{ €}$ par heure, à quelle valeur doit-on fixer la capacité de production b_2 ? Même question si le prix d'usage est de 4 € par heure.

Exercice 15. *Prix duaux et interprétation économique pour une minimisation de coûts sous contraintes de demande à satisfaire.*

Une entreprise peut fabriquer un même produit dans deux de ses ateliers. Les capacités de production de ces deux ateliers a et b, exprimées en quantité de produit, sont de 7 pour l'atelier a et de 10 pour le b. D'autre part, on suppose que le nombre d'heures de main d'œuvre qu'on peut affecter globalement à cette production est de 60. Or, chaque unité de produit nécessite 6 heures de main d'œuvre dans l'atelier a, 5 heures dans le b. Enfin, la production totale doit permettre de satisfaire une demande de 8 produits. Les coûts variables unitaires sont de 20 € pour un produit fabriqué dans l'atelier a et de 30 € pour un produit fabriqué dans l'atelier b. L'entreprise désire produire à coût minimum.

1. Écrire le programme correspondant et déterminer graphiquement l'optimum.
2. Écrire les conditions d'optimalité et en déduire les prix duaux optimaux.
3. Interpréter économiquement ces prix duaux.
4. Sachant que le prix d'usage de l'atelier a (équipements et main d'œuvre) est de 2 € par heure, un accroissement de capacité de production est-il profitable ?
5. Sachant que le prix de vente du bien est de 40 € , un accroissement de demande sera-t-il profitable ?

Exercice 16. Amélioration d'un réseau routier. En prévision d'une augmentation de trafic routier entre les villes A et F, on veut analyser les possibilités du réseau joignant ces villes décrit dans la figure ci-dessous. Les capacités des routes (en centaines de véhicules par heure) sont indiquées par les nombres



encadrés et les flux actuels par des nombres non encadrés.

1. En utilisant l'algorithme de marquage, déterminer le flot maximal pouvant circuler de A à F.
2. En fait, le graphe précédent ne tient pas compte de l'évaluation du nombre maximal de véhicules pouvant traverser chacune des villes B, C, D, E. Ces débits maximaux sont respectivement de 5, 6, 7 et 5. Pour tenir compte de ces limitations, on dédoublera chaque sommet X parmi B, C, D, E en deux sommets X_1 et X_2 . X_1 désigne alors l'entrée de la ville X, X_2 sa sortie. Tracer le réseau correspondant et y faire figurer les flux initiaux.
3. À l'aide de l'algorithme de marquage, déterminer le flot maximal pouvant circuler dans ce nouveau réseau. Quelle mesure peu coûteuse peut-on conseiller aux responsables de la voirie ?
4. Quelle est la coupe minimale ? Quels enseignements en tirer ?

Exercice 17. Pourvoi de postes administratifs. L'administration veut pourvoir, dans quatre villes, des postes correspondant à un certain niveau de qualification. Le personnel requis est issu de trois centres de formation qui s'adressent chacun à des candidats de profils différents (scientifiques, techniciens, littéraires). Ces centres notés S, T et L peuvent former un maximum de 10, 15 et 16 personnes alors que les quatre villes notées A, B, C et D disposent de 10, 10, 12 et 9 postes. Les services de chaque ville expriment des vœux concernant l'origine des agents. On obtient ainsi les souhaits des villes :

- ville A : au moins 3 scientifiques et au plus 4 littéraires.
- ville B : au moins 3 scientifiques.
- ville C : au plus 5 techniciens et au plus 4 littéraires.
- ville D : au moins 2 scientifiques et au plus 3 littéraires.

1. Construire le graphe correspondant à ce problème d'affectation en encadrant les bornes inférieures sur les flux par des parenthèses et les bornes supérieures par des barres. Exemple : $|4|$ et (3) .
2. On considère une première affectation dans laquelle :
 - Le centre S fournit resp. 3, 3, 2, 2 agents aux villes A, B, C, D
 - Le centre T : 3, 3, 5, 4.
 - Le centre L : 4, 4, 4, 3.
 Reconstituer sur le graphe le flot correspondant. En utilisant l'algorithme de marquage du flot maximum, chercher si on peut pourvoir tous les postes.
3. Étant donnés les résultats du marquage en fin d'algorithme, quelles sont les arêtes pour lesquelles une réévaluation des bornes (supérieures ou inférieures) pourrait conduire à une augmentation du flot ?
4. L'administration demande aux services de la ville B de réduire à 2 leur demande en scientifiques. Peut-on alors pourvoir tous les postes ? Commenter, en termes de transferts de flots, l'opération correspondante.

Exercice 18. Minimisation des coûts dans un problème d'ordonnancement. On considère un chantier qui fait intervenir les tâches a, b, c, d, e de durées respectives 10, 7, 1, 8 et 3 jours. La tâche a précède les tâches c et d , les tâches b et c précèdent la tâche e . Les tâches a, b, c, d, e supportent alors des frais directs (main d'œuvre, heures de machines, ...) de 500, 200, 350, 150 et 200 U . D'autre part, l'entreprise supporte des frais indirects qui sont fonction de la durée du chantier t_{fin} . Ces frais indirects comportent les salaires de l'encadrement, des frais de location de matériel, des frais d'assurance et des frais financiers. Le tout pour un montant de $200 + 40 t_{\text{fin}}$. Ils comprennent, en supplément du montant précédent, une pénalisation de 100 U par jour de retard au-delà du 16^e jour.

1. Tracer le graphe construit par la méthode des potentiels et déterminer le ou les chemin(s) critique(s).
2. Même question mais en utilisant cette fois la méthode PERT.
3. Écrire le problème de calcul des dates au plus tôt sous forme de programme linéaire.
4. Les durées des tâches b, d, e peuvent être réduites jusqu'à 5, 3 et 1 jours au prix d'accroissements des coûts de 120, 30 et 100 U par jour. En utilisant le graphe de la question 2, comment réduire progressivement la durée totale t_{fin} des travaux de façon à ce que le coût direct soit toujours minimum.
5. Décrire par un graphique l'évolution du coût direct et du coût indirect en fonction de la durée t_{fin} des travaux sur le chantier. Quelle valeur donner à cette durée ?

Exercice 19. Ordonnement dans l'édition. Un éditeur veut passer commande d'un ouvrage technique à un auteur scientifique. Les opérations à accomplir sont indiquées dans le tableau ci-après, avec leur durée et la mention des opérations qui doivent précéder chacune d'entre elles. Les durées sont indiquées en quinzaines de jours.

Labels	Opérations	Durées	Opérations antérieures
a	Approbation du plan de l'ouvrage	1	néant
b	Signature du contrat	1	a
c	Remise du manuscrit	12	b
d	Approbation du comité de lecture	2	c
e	Composition du texte	3	d
f	Correction par les correcteurs de l'imprimerie	1	e
g	Clichage et tirage des hors-texte	3	d
h	Exécution des dessins des figures	4	d
i	Révision des dessins par l'auteur	1	h
j	Correction des dessins et clichage des figures	2	i
k	Première correction des épreuves par l'auteur	2	f
l	Exécution des premières corrections à l'imprimerie	1	k
m	Seconde correction des épreuves par l'auteur ; indication de l'emplacement des clichés ; approbation des hors-texte	2	g,j,l
n	Exécution des secondes corrections à l'imprimerie ; mise en pages	1	m
o	Tirage du livre	2	n
p	Exécution de la prière d'insérer des listes d'exemplaires de presse et d'hommage	1	m
q	Pliage	1	o
r	Brochage	1	q
s	Reliure de certains exemplaires	2	q
t	Impression de la prière d'insérer	1/2	p
u	Envoi des exemplaires de presse	1/4	r et t
v	Envoi des hommages	1/8	s et t
w	Envoi des contingents aux libraires	1/2	r et s

- Employer successivement la méthode des potentiels et la méthode PERT pour déterminer :
 - la durée totale des travaux,
 - le (ou les) chemin(s) critique(s),
 - la marge totale pour chacune des tâches.
- Reprendre le problème en introduisant les modifications suivantes :
 - La composition du texte (e) ne pourra être effectuée que 17 quinzaines après le début des opérations,
 - Le tirage (o) pourra commencer lorsque la mise en pages (n) aura été effectuée à moitié.
- Discuter alors de la souplesse des deux méthodes face à l'introduction de ces deux modifications.