

Épreuve de juin 2012

- L'utilisation de tout appareil électronique autre qu'une calculatrice est formellement interdite.
- Durée : 2h.

Exercice 1. On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 6z = 1 \end{cases}$$

- Montrer qu'il n'y a que deux bases de coordonnées qui permettent de résoudre le système.
- Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot pour la base $\{1, 2\}$.
- Quelle est la solution de base associée à l'autre base de coordonnées ?

Exercice 2. On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & 2x + y \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x + y \leq 3 \\ x + 4y \geq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

- L'écrire sous forme standard.
- Effectuer la phase 1 de la méthode du simplexe.
- En déduire une solution de base réalisable.
- Résoudre le programme linéaire à l'aide de la méthode du simplexe.
- Écrire le problème dual associé.
- Écrire les équations d'optimalité et en déduire la solution du problème dual.
- Résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe le programme linéaire suivant où l'on a remplacé la maximisation par une minimisation :

$$\text{minimiser } 2x + y \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x + y \leq 3 \\ x + 4y \geq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3. L'unité monétaire fictive de l'exercice est le khôr (\mathcal{U}), encore utilisé en Syldavie. Une entreprise de denrées alimentaires doit à la suite de nouvelles normes introduire dans ses plats cuisinés une certaine teneur en vitamines A et C, et en fibres alimentaires. Aussi ajoute-t-elle deux aliments à la recette de ses plats : du chou blanc cru et des épinards. Le tableau suivant spécifie les teneurs correspondantes en vitamines et en fibres, ainsi que les normes exigées (dans la même unité).

	chou	épinards	quantité exigée par marmite
vitamine A (en mg/kg)	0,5	0,5	0,5 mg
vitamine C (en mg/kg)	80	10	20 mg
fibres alimentaires (en g/kg)	4	20	10 g
Prix (en \mathcal{U} /kg)	0,5	0,2	

- (a) L'entreprise cherche à satisfaire les nouvelles normes au moindre coût. Écrire le programme linéaire correspondant. On précisera clairement les variables utilisées et leurs unités.
- (b) Le résoudre graphiquement. *On calculera pour cela les pentes de certaines droites.* On précisera
- la solution exacte,
 - le coût minimal,
 - les apports en vitamines A, C et en fibres alimentaires.
- Dans la suite, on prendra garde à travailler avec les données du problème primal directement issu du tableau ci-dessus et non d'un problème simplifié dont les unités seraient transformées.*
- (c) Écrire le programme dual associé au problème primal de la question (a).
- (d) Écrire les conditions d'optimalité et en déduire les prix duaux dont on précisera les unités. Vous en donnerez une interprétation économique.
- (e) Quelles sont les contraintes b_A , b_C et b_F en vitamines et fibres pour lesquelles les prix duaux que vous avez calculés sont inchangés ?
- (f) Quel serait le nouvel optimum si le prix des épinards passait à 0,6 \mathcal{U} /kg ?
- (g) Quel serait le coût minimal si la norme imposait au moins 40 mg de vitamine C au lieu de 20 ?