Licence Économie et Gestion
Dumont, Léonard, Mary, Mohamed

Exercices de travaux dirigés

Semaine 1 - Rappels

Exercice 1. Dériver deux fois les fonctions suivantes et déterminer les développements limités à l'ordre 2 en $x_0 = 1$

(a) $f(x) = \sqrt{(}2x + 2) * \exp(-x)$

(b) $f(x) = \log(x)/x$

(c) $f(x) = (x^3 - x)^5$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 16x^3/3 + 6x^2 + 1$. Déterminer les minimum et maximum de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 3. Un négociant en vin achète à l'instant 0 une bouteille pour c euros. Sa valeur augmente au cours du temps, de sorte que le prix de vente à l'instant t est $c\ a^{\sqrt{t}}$, où a est un paramètre positif. Si l'on veut tenir compte de l'inflation r et exprimer sa valeur $C(t)$ en euros constants, elle est donc à l'instant t de

$$C(t) = c\ a^{\sqrt{t}} e^{-rt}.$$

À quel moment le négociant a-t-il intérêt à vendre la bouteille ?

Exercice 4. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \exp\left(-4x^2 - \dfrac{1}{1+x^2}\right)$ sur son domaine de définition. Dire si f possède des extremums locaux puis globaux.

Exercice 5. Déterminer les extremums des fonctions suivantes et préciser leur nature.

$$f(x) = x^2 + x + 1\ ,\quad f(x) = x^3 + 1\ ,\quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 1\ ,\quad f(x) = \sqrt{1 + x^2}\ ,$$
$$f(x) = x\mathrm{e}^x + 1\ ,\quad f(x) = x^3 \log(x) - 1\ ,\quad f(x) = \frac{2x-1}{x+3}\ ,\quad f(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}\ .$$

Semaine 2 - Géométrie de $\mathbb{R}^2$

Exercice 6. Représenter graphiquement les ensembles suivants :

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1\}$

Exercice 7. Représenter pour $z = 0$ et 1 les domaines suivants :

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = z\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq z\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \leq z\}$

Exercice 8. Représenter graphiquement les ensembles suivants :

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ ou } y \geq 0\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 4,\ y \leq 2,\ x + y \geq 3\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4,\ y \geq 2,\ x + y \leq 3\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4,\ y \geq 2,\ x + y \geq 3\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq -1,\ x + y \geq 3\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ -x^2 \leq y \leq e^x\}$

(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 - 1 \text{ ou } x^2 + y^2 \geq 1\}$

Semaine 3 - Fonctions de deux variables

Exercice 9. Soient x et y les quantités de deux produits P et Q. Une unité de P vaut 4 euros, une unité de Q vaut 3 euros.

1. Quel est le montant des commandes suivantes :
   (a) $x = 2,\ y = 3,$
   (b) $x = 3,\ y = 2,$
   (c) $x = 0,\ y = 5,$
   (d) $x = 6,\ y = 1.$
   (e) $x = 9,\ y = 0.$
2. Parmi les commandes précédentes laquelle coûte la moins chère ? La plus plus chère ?
3. Parmi toutes les commandes x, y entières possibles, lesquelles ont un montant inférieures à 15 euros ?

Exercice 10 (Domaine de définition)**.** Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

(c) $f(x,\, y) = \sqrt{y - x}/\log(x)$

Exercice 11 (Lignes de niveau)**.** Soit la fonction

$$f(x,\, y) = y^2 - x^2$$

Déterminer ses lignes de niveau $C_{z_o} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = z_o\}$ pour $z_o = 0$, $z_o = 1$ et $z_o = -1$.

Exercice 12. Représenter graphiquement les lignes de niveau $z_0 = 0, 1, 4$ pour chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x,\, y) = x + y$

(b) $f(x,\, y) = (x + y)^2$

Exercice 13. Soit la fonction de Cobb-Douglas $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/2}$, avec $x, y > 0$.

Comparer $f(ax, ay)$ et $af(x, y)$ pour $a \geq 1$. (En économie, on parle de rendements d'échelle décroissants).

Semaine 4 - Vecteur gradient

Exercice 14 (Dérivées partielles)**.** Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes. On précisera leur domaine de définition.

(a) $f(x,\, y) = -y^2 + x$

(b) $f(x,\, y) = xy^2 + x/y - x$

(c) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(d) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

Exercice 15. Pour les fonctions suivantes : représenter graphiquement la ligne de niveau $z_o = 1$, écrire le Développement limité à l'ordre 1 en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et tracer sur le même dessin le vecteur gradient $\vec{\nabla} f$ en $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Quel résultat du cours observe-t-on ?

(a) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

(c) $f(x,\, y) = (x + y)/2$

(d) $f(x,\, y) = (x + y)^2/4$

Exercice 16. Soit la fonction d'une variable $g(x) = \exp(2(x - 1))$. On définit la fonction de deux variables $f(x, y) = y - g(x)$.

1. Tracer le graphe de g et la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$ (on tracera cette tangente).
2. Calculer le vecteur gradient $\vec{\nabla} f$ en $P = (x_0, y_0)$ (avec $y_0 = g(x_0)$) et le tracer.
3. Calculer le produit scalaire de $\vec{\nabla} f$ avec un vecteur $Q - P$, où Q est un point quelconque de la tangente.

Semaine 5 - Formes quadratiques

Exercice 17. Soit $P(x) = 3x^2 + x + 1$ un polynôme du second degré.

(a) Mettre P sous sa forme canonique, c'est à dire sous la forme $P(x) = u(x - v)^2 + w$

(b) En déduire le signe de $P(x)$ sans utiliser la méthode du discriminant.

Exercice 18. 1. En utilisant la méthode de la forme canonique de l'exercice précédent, pour chaque forme quadratique $Q(h, k)$ suivante :

(a) $Q(h, k) = -2h^2 + hk - 3k^2$

(b) $Q(h, k) = h^2 - 6hk + 9k^2$

(c) $Q(h, k) = h^2 - 4hk - 2k^2$

(d) $Q(h, k) = 4hk + 2k^2$

Dire si $Q(h, k)$ est toujours positif, toujours négatif ou change de signe et déterminer les vecteurs de déplacement $\overrightarrow{(h, k)}$ solutions de $Q(h, k) = 0$.

2. Généraliser à la forme quadratique $Q(h, k) = r_0h^2+2s_0hk+t_0k^2$, on discutera du signe de $Q(h, k)$ en fonction des coefficients r_0, s_0 et t_0.

Exercice 19. Pour les fonctions suivantes : écrire le développement limité d'ordre 2 en (x_0, y_0) puis discuter le signe de la forme quadratique associée $Q(h, k) = r_0h^2 + 2s_0hk + t_0k^2$:

(a) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ $\quad f(x, y) = 4\,x^2 - y^2$

(b) $(x_0, y_0) = (1, 1)$ $\quad f(x, y) = x \log y$

(c) $(x_0, y_0) = (0, 1)$ $\quad f(x, y) = \exp(1 + x\,y^2)$

(d) $(x_0, y_0) = (1, 1)$ $\quad f(x, y) = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$

Exercice 20. Soit $f(x, y) = (2x - y)^2 - x^3$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est l'unique point stationnaire de f.
2. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$.
3. Montrer que $Q(h, k) \geq 0$ pour tous les vecteurs (h, k).
4. Étudier le signe de $f(x, y)$ le long de la droite d'équation $y = 2x$.

Semaine 6 - Contrôle continu - Convexité

Contrôle continu 1 en début de séance

Exercice 21. Dans chaque cas, montrer que la fonction f est convexe.

1. $f(x) = x^8 + 2x^6 + 2x - 3$
2. $f(x) = e^x + x^2 - ex$
3. $f(x) = \sqrt{x^4 + 3} - x$.

Exercice 22. Étudier la convexité/concavité des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + x + 3$
2. $f(x, y) = \exp(x) + y^4$
3. $f(x, y) = ax + by + c$, a, b, c réels.
4. $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$
5. $f(x, y) = xy$
6. $f(x, y) = y^2 \log(x)$
7. $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$
8. $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2) - \sqrt{x}\sqrt{y}$

Semaine 7 et 8 - Optimisation libre

Exercice 23. Dans chaque fonction recherchez le(s) point(s) stationnaire(s) et déterminer leur nature locale.

1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
3. $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

Exercice 24. Soit $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$

(a) Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s)

(b) Sans calcul, déterminer sa nature globale.

Exercice 25. Optimiser globalement les fontions suivantes (on pourra utiliser la convexité).

(a) $f(x,y) = (x+y)^2 + x^2$ sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$

(b) $f(x,y) = (x-y)^2$ sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$

(c) $f(x,y) = -x - y + \log(xy)$ sur $\mathcal{D} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$

(d) $f(x,y) = -x - y + \log(xy)$ sur $\mathcal{D}$: domaine de définition de f.

Exercice 26. Optimiser les fonctions suivantes.

(a) $f(x,\, y) = 4\,x^3 - y^2 - 3\,x + 4\,y + 3$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x}\sqrt{y} - x - y^2$

(c) $f(x,\, y) = \dfrac{x^2}{y} + (y-1)^2$ sur $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$

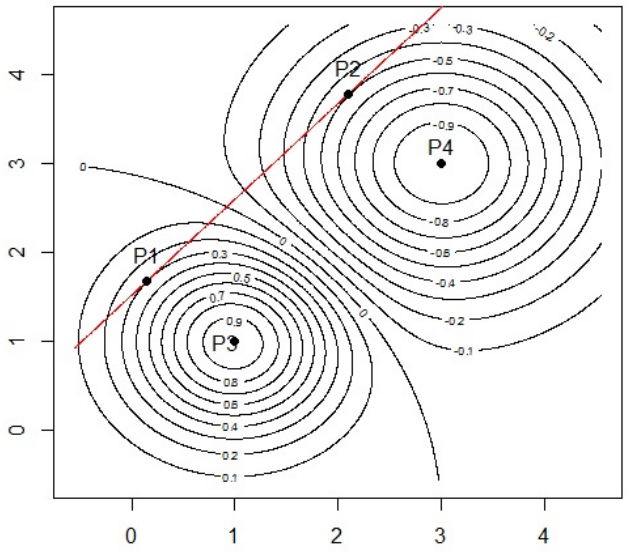

FIGURE 1 – Lignes de niveaux

Semaines 9 et 10 - Optimisation sous contrainte d'égalité

Exercice 27. Sur la figure 1 les courbes noires représentent des lignes de niveaux d'une fonction $f(x, y)$ et la droite (P_1, P_2) est une contrainte du type $g(x, y) = 0$.

1. Que peut-on dire des points $P1, P2, P3$ et $P4$?
2. Que dire du gradient de f en ces points ?

Exercice 28. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x-\lambda = 0 \\ 2y+3\lambda = 0 \\ x+y = -1 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x+y+2\lambda = 0 \\ 6x-2y-4\lambda = 0 \\ x+y = 2 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} x-\lambda = 0 \\ y-2\lambda = 0 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 4x+2y-4\lambda = 0 \\ 6x+3y-6\lambda = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \quad (S_5)\begin{cases} x-\lambda x = 0 \\ xy^2-\lambda = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 29. Parmi les points suivants, lesquels sont des points stationnaires de $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ sous la contrainte $x^2 + xy + y^2 = 3$.

$$a)(x=0, y=0, \lambda=0); \quad b)(x=2, y=1, \lambda=2); \quad c)(x=1, y=1, \lambda=1)$$

$$d)(x=0, y=\sqrt{3}, \lambda=-1); \quad e)(x=-1, y=-1, \lambda=?)$$

Exercice 30. On considère les fonctions suivantes. En utilisant la méthode du lagrangien, déterminer les points stationnaires de f sur

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2y + x = 1\}$$

puis déterminer leur nature.

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$

(b) $f(x,y) = (x+y)^2 + x^2$

(c) $f(x,\, y) = \log(-x\, y)$ (faire attention au domaine)

(d) $f(x,\, y) = xy$.

Exercice 31. Lors de la recherche des points stationnaires d'un problème d'optimisation où la contrainte est $x^2 - y = -1$, les étudiants ont trouvé l'unique point $(x_0 = 1, y_0 = 2, \lambda_0 = -1)$. On note $\mathcal{L}_0(x,y) = \mathcal{L}(x,y,\lambda_0)$. Donner la nature de ce point stationnaire lorsque le DL de $\mathcal{L}_0(x,y)$ en $(x_0, y_0) = (1,2)$ vaut :

$$\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) = 3 + 2h^2 + 3k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) = -5 - 2h^2 + hk - k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) = h^2 - hk + k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) = 8 + h^2 + 3hk + k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \quad (4)$$

Exercice 32. Soit $f(x,y) = x + y$. On considère $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Trouver les points stationnaires de f sur D par la méthode du lagrangien.
2. En déduire les extremums globaux de f sur D.
3. Comparer avec la méthode de substitution.

Exercice 33. Considérons trois produits A , B de prix unitaires respectivement $p_a = 1$ et $p_b = 2$. Un consommateur possède un revenue $R = 20$.

1. Optimiser la fonction d'utilité $f(x,y) = xy$ où x (resp. y) est la quantité de produits A (resp. B) achetée par le consommateur.
2. Même question avec $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$ (Cobb-Douglas) et $f(x,y) = \log(x) + \log(y)$.
3. Représenter graphiquement le premier problème et sa solution.

Semaine 11 - Contrôle continu et optimisation sur un triangle

Contrôle continu 2 en début de séance.

Exercice 34. Considérons le triangle T défini par :

$$T = \{(x, y) | x \geq 0,\ y \geq 0,\ y + 2x - 4 \leq 0\}$$

Pour les deux fonctions suivantes : optimiser la fonction à l'intérieur de T, sur les trois côtés de T, sur les trois coins de T. Conclure sur le maximum et le minimum global de la fonction sur T

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + y$
2. $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$

Exercice 35. Soit la fontion $f(x, y) = y - x^2$.

1. Optimiser f sous la contrainte $y - x = 0$.
2. Tracer sur un même graphique les lignes de niveau de f et la contrainte $y - x \geq 0$.
3. À l'aide de ce graphique que peut-on dire des extremums de f sous la contrainte $y - x \geq 0$?

Semaine 12 (supplémentaire)
Optimisation globale de fonctions avec ou sans contraintes

Exercice 36. Soit $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2} \cdot \dfrac{2x}{1+x^2}$

1. Montrer que $\dfrac{2x}{1+x^2}$ est borné
2. Montrer que $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque $||(x,y)||$ tend vers $+\infty$
3. En déduire les extremums globaux de f

Exercice 37. Soit $f(x,y) = \exp\left(x^2+y^2 - \dfrac{1}{1+x^2}\right)$

1. Montrer que $\dfrac{1}{1+x^2}$ est borné
2. Montrer que $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ lorsque $||(x,y)||$ tend vers $+\infty$
3. En déduire le minimum global de f.
   La fonction f possède-t-elle un maximum global ?

Exercice 38. Optimiser la fonction $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ sur le disque de rayon 4 et de centre $(0,0)$.