Licence Économie et Gestion | L1 - Analyse 2
Dumont, Léonard, Mary, Mohamed | 2017-2018

Exercices de travaux dirigés

Géométrie de $\mathbb{R}^2$

Semaine 1

Exercice 1. Représenter graphiquement les ensembles suivants :

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 - x^3 = 0\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1\}$

Exercice 2. Représenter pour $z = 0$ et 1 les domaines suivants :

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = z\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = z\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq z\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = z\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = z\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \leq z\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 = z\}$

(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 > z\}$

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq z\}$

Semaine 2

Exercice 3. Placer les points P, $P + (u, v)$ et $P + (k, l)$ dans le plan :

(a) $P = (0, 0)$, $(u, v) = (-2, 2)$, $(k, l) = (1, -1)$.

(b) $P = (-1, 1)$, $(u, v) = (-2, 2)$, $(k, l) = (1, 2)$.

(c) $P = (1, -1)$, $(u, v) = (-2, 2)$, $(k, l) = (-1, 2)$.

(d) $P = (2, 2)$, $(u, v) = (1, 0)$, $(k, l) = (0, 1)$.

(e) $P = (-1, 0)$, $(u, v) = (2, 0)$, $(k, l) = (1, 1)$.

Exercice 4. Dans l'exercice précédent, les vecteurs (u, v) et (k, l) sont-ils orthogonaux ?

Exercice 5. Calculer le produit scalaire de tout couple de vecteurs choisis parmi

$$(1, 1), \ (0, 1), \ (1, -5), \ (-1, 1)/\sqrt{3}.$$

Lesquels sont orthogonaux ?
Calculer les normes de ces vecteurs.

Exercice 6. Représenter graphiquement les ensembles suivants :

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ ou } y \geq 0\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 4, \ y \leq 2, \ x + y \geq 3\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4, \ y \geq 2, \ x + y \leq 3\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4, \ y \geq 2, \ x + y \geq 3\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \ y \geq -1, \ x + y \geq 3\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \ -x^2 \leq y \leq e^x\}$

(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, \ -y^2 \leq x \leq e^y\}$

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1, x^2 + y^2 = 1\}$

(j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$

Fonctions de deux variables

Semaine 3

Exercice 7 (Domaine de définition)**.** Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

(c) $f(x,\, y) = \sqrt{y - x}/\log(x)$

Exercice 8 (Lignes de niveau)**.** Soit la fonction

$$f(x,\, y) = y^2 - x^2$$

Déterminer ses lignes de niveau $C_{z_o} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = z_o\}$ pour $z_o = 0$, $z_o = 1$ et $z_o = -1$.

Exercice 9. Représenter graphiquement les lignes de niveau $z_0 = 0, 1, 4$ pour chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x,\, y) = x + y$

(b) $f(x,\, y) = (x + y)^2$

Exercice 10 (Dérivées partielles)**.** Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes. On précisera leur domaine de définition.

(a) $f(x,\, y) = -y^2 + x$

(b) $f(x,\, y) = xy^2 + x/y - x$

(c) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(d) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

Semaine 4

Exercice 11. Représenter graphiquement la ligne de niveau $z_o = 1$ des fonctions suivantes, et tracer sur le même dessin le vecteur gradient $\vec{\nabla} f$ en $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Quel résultat du cours observe-t-on ?

(a) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

(c) $f(x,\, y) = (x + y)/2$

(d) $f(x,\, y) = (x + y)^2/4$

Exercice 12. Écrire les développements limités d'ordre 2 en $(x_0,\, y_0)$ des fonctions suivantes :

(a) $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$ $\quad f(x,\, y) = 4\, x^2 - y^2$

(b) $(x_0,\, y_0) = (1,\, 1)$ $\quad f(x,\, y) = x\, \log y$

(c) $(x_0,\, y_0) = (0,\, 1)$ $\quad f(x,\, y) = \exp\left(1 + x\, y^2\right)$

(d) $(x_0,\, y_0) = (1,\, 1)$ $\quad f(x,\, y) = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$

Exercice 13. Soit la fonction d'une variable $g(x) = \exp(2(x-1))$. On définit la fonction de deux variables $f(x, y) = y - g(x)$.

1. Tracer le graphe de g et la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$ (on tracera cette tangente).
2. Calculer le vecteur gradient $\vec{\nabla} f$ en $P = (x_0, y_0)$ (avec $y_0 = g(x_0)$) et le tracer.
3. Calculer le produit scalaire de $\vec{\nabla} f$ avec un vecteur $Q - P$, où Q est un point quelconque de la tangente.

Exercice 14. On veut faire des boîtes de 1 m^3 dont la base est un rectangle de côtés x et y.

1. Calculer en fonction de x et y la hauteur que doit avoir la boîte.
2. En déduire que la surface est donnée par la fonction $S(x,\, y) = 2xy + 2/x + 2/y$. Quel est son domaine de définition ?
3. On fixe $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$. Écrire le développement limité d'ordre 1 de S en $(x_0,\, y_0)$.
4. À l'aide de la question précédente, donner (sans calculatrice) une valeur approchée de la surface de carton utilisée quand le rectangle de base est $(x_0',\, y_0') = (1.95\,;\, 0.95)$, et comparer au résultat exact.
5. Soit maintenant une base de taille $(x = 1,\, y = 1)$. Établir de manière analogue une valeur approchée de la surface utilisée pour $(x',\, y') = (1.05\,,\, 0.90)$. L'ordre 1 est-il suffisant ?

Optimisation de fonctions d'une variable

Semaine 5

Optimisation sur un intervalle

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3x + 27/x + 4$.

1. Trouver le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[1, 2]$.
2. Trouver le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[1, 9]$.

Exercice 16. Un négociant en vin achète à l'instant 0 une bouteille pour c euros. Sa valeur augmente au cours du temps, de sorte que le prix de vente à l'instant t est $c\ a^{\sqrt{t}}$, où a est un paramètre positif. Si l'on veut tenir compte de l'inflation r et exprimer sa valeur $C(t)$ en euros constants, elle est donc à l'instant t de

$$C(t) = c\ a^{\sqrt{t}} e^{-rt}.$$

À quel moment le négociant a-t-il intérêt à vendre la bouteille ?

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \log(x + 1/x)$.

1. Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.
2. Préciser la nature de chaque point stationnaire.
3. Etudier les variations de f.

Convexité

Exercice 18. Montrer que $x \mapsto e^x - x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Que vaut son minimum ? Que dire de $x \mapsto e^x + x$?

Exercice 19. Dans chaque cas, montrer que la fonction f est convexe. f possède-t-il un minimum global ?

1. $f(x) = x^8 + 2x^6 + 2x - 3$ (Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f')
2. $f(x) = e^x + x^2 - ex$ (Appliquer le théorème de Rolle à f)

Exercice 20. Soit f la fonction réelle définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^4 + 3} - x$.

1. Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.
2. Préciser la nature de chaque point stationnaire.
3. La fonction f est-elle convexe ?

Méthode de substitution

Semaine 6

Exercice 21. Le service de gestion de l'entreprise Leovia a estimé qu'un investissement de x euros en travail et de y euros en équipements faisait gagner $x\sqrt{y}$ euros. L'entreprise dispose de 100 000 euros à investir, comment le faire de façon optimale ?

Exercice 22. Soit $f(x,y) = e^x - \frac{x}{y}$ définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \text{ et } x + y + x^2 y = 0\}$.

1. Exprimez y en fonction de x sur D puis substituer dans la fonction f.
2. Montrer que la fonction $x \to e^x + x^2 + 1$ est strictement convexe et quelle admet un unique point stationnaire sur $]-\infty, 0[$.
3. En déduire que le problème $\min\limits_{(x,y)\in D} e^x - \dfrac{x}{y}$ admet un unique minimum global.

Exercice 23. En utilisant la méthode de substitution, déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2y - x = 0, -2 \leq x \leq 2\}$.

(a) $f(x,\, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

(b) $f(x,y) = x^4 - y^2$

(c) $f(x,\, y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)$

(d) $f(x,\, y) = x\left(y^2 + 1\right)$

Exercice 24. En utilisant la méthode de substitution, déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ et } xy = 1\}$.

(a) $f(x,\, y) = x + \log(x\, y)$

(b) $f(x,y) = x^2/y$

(c) $f(x,y) = \log(x) + y$

Optimisation libre

Semaine 7-8

Contrôle continu numéro 1 en semaine 7

Exercice 25. Dans chaque fonction recherchez le(s) point(s) stationnaire(s) et déterminer leur nature locale.

1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

3. $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

Exercice 26. *Soit* $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$

(a) Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s)

(b) Sans calcul, déterminer sa nature globale.

Exercice 27. Dire si les fonctions suivantes sont convexes sur le domaine précisé.

(a) $f(x,y) = (x+y)^2 + x^2$ sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$

(b) $f(x,y) = (x-y)^2$ sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$

(c) $f(x,y) = x + \log(xy)$ sur $\mathcal{D} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$

(d) $f(x,y) = x + \log(xy)$ sur $\mathcal{D}$: domaine de définition de f.

Exercice 28. Optimiser les fonctions suivantes.

(a) $f(x,\, y) = 4\,x^3 - y^2 - 3\,x + 4\,y + 3$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x}\sqrt{y} - x - y^2$

(c) $f(x,\, y) = \frac{x^2}{y} + (y-1)^2$ sur $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$

Exercice 29. Soit la fonction de Cobb-Douglas $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/2}$, avec $x, y > 0$.

Comparer $f(ax, ay)$ et $af(x,y)$ pour $a \geq 1$. (En économie, on parle de rendements d'échelle décroissants).

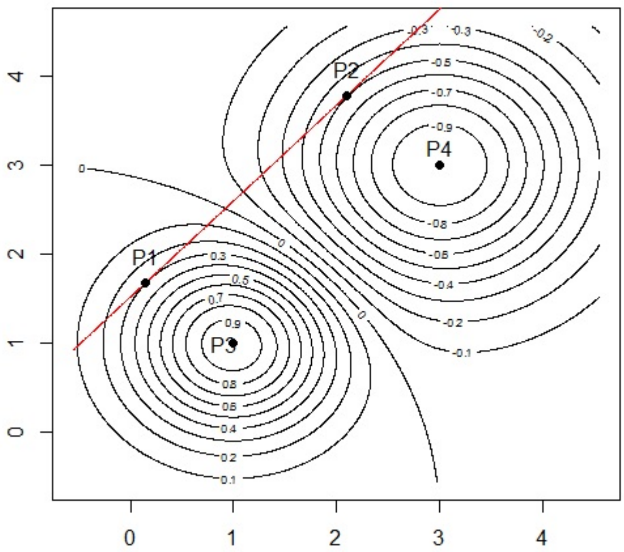

FIGURE 1 – Lignes de niveaux

Optimisation sous contrainte d'égalité

Semaine 8-9

Exercice 30. Sur la figure les courbes noires représentent des lignes de niveaux d'une fonction $f(x,y)$ et la droite (P_1,P_2) est une contrainte du type $g(x,y)=0$.

1. Que peut-on dire des points $P1, P2, P3$ et $P4$?
2. Que dire du gradient de f en ces points ?

Exercice 31. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x-\lambda = 0 \\ 2y+3\lambda = 0 \\ x+y = -1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+2\lambda = 0 \\ 6x-2y-4\lambda = 0 \\ x+y = 2 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x-\lambda = 0 \\ y-2\lambda = 0 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 4x+2y-4\lambda = 0 \\ 6x+3y-6\lambda = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} x-\lambda x = 0 \\ xy^2-\lambda = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 32. Parmi les points suivants, lesquels sont des points stationnaires de $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ sous la contrainte $x^2 + xy + y^2 = 3$.

$$a)(x = 0, y = 0, \lambda = 0); \quad b)(x = 2, y = 1, \lambda = 2); \quad c)(x = 1, y = 1, \lambda = 1)$$

$$d)(x = 0, y = \sqrt{3}, \lambda = -1); \quad e)(x = -1, y = -1, \lambda = ?)$$

Exercice 33. On considère les fonctions suivantes. En utilisant la méthode du lagrangien, déterminer les points stationnaires de f sur

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2y + x = 1\}$$

puis déterminer leur nature.

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$

(b) $f(x,y) = (x+y)^2 + x^2$

(c) $f(x,\, y) = \log(-x\,y)$ (faire attention au domaine)

(d) $f(x,\, y) = xy$.

Exercice 34. Lors de la recherche des points stationnaires d'un problème d'optimisation où la contrainte est $x^2 - y = -1$, les étudiants ont trouvé l'unique point $(x_0 = 1, y_0 = 2, \lambda_0 = -1)$. On note $\mathcal{L}_0(x,y) = \mathcal{L}(x,y,\lambda_0)$. Donner la nature de ce point stationnaire lorsque le DL de $\mathcal{L}_0(x,y)$ en $(x_0, y_0) = (1,2)$ vaut :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) &= 3 + 2h^2 + 3k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) && (1)\\
\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) &= -5 - 2h^2 + hk - k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) && (2)\\
\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) &= h^2 - hk + k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) && (3)\\
\mathcal{L}_0(1+h, 2+k) &= 8 + h^2 + 3hk + k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) && (4)
\end{aligned}$$

Exercice 35. Soit $f(x,y) = x + y$. On considère $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Trouver les points stationnaires de f sur D par la méthode du lagrangien.
2. En déduire les extrema globaux de f sur D.
3. Comparer avec la méthode de substitution.

Exercice 36. Considérons trois produits A , B de prix unitaires respectivement $p_a = 1$ et $p_b = 2$. Un consommateur possède un revenue $R = 20$.

1. Optimiser la fonction d'utilité $f(x,y) = xy$ où x (resp. y) est la quantité de produits A (resp. B) achetée par le consommateur.
2. Même question avec $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$ (Cobb-Douglas) et $f(x,y) = \log(x) + \log(y)$.
3. Représenter graphiquement le premier problème et sa solution.

Calcul intégral

Semaine 10

Exercice 37. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{2}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^2 (1+2x-x^3)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^2 t^7\,dt$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{3t}\,dt$ (f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{2+x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2}{x^3+1}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+1}{(e^x+x)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,dx$ (j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 x - \cos^2 x]\,dx$

Exercice 38. Calculer des primitives des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = e^{-x}$

(b) $f(x) = 4/3x$

(c) $f(x) = x \exp x^2$

(d) $f(x) = (2x+1)(x^2+x)^3$

Exercice 39. Réduire (écrire de manière simplifiée) puis calculer les expressions suivantes

(a) $\displaystyle I = \int_1^2 (x^2-1-x)\,dx + \int_1^2 1+t\,dt + \int_2^3 x^2\,dx$

(b) $\displaystyle J = \int_{-2}^2 (e^{2x}-x)\,dx + \int_{-3}^{-2} e^{2x}\,dx$

(c) $\displaystyle K = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (on écrira $\frac{1}{x^2-1}$ sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$).

Semaine 11

Exercice 40.

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $1 - x \leq \frac{1}{1+x}$.
2. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $t - t^2 \leq \log(1+t)$.

Exercice 41. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \log t \, dt$

(c) $\displaystyle\int_1^5 x \log x \, dx$

Exercice 42. Calculer des primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par partie :

(a) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

(b) $f(x) = (\log x)^2$

(c) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(d) $f(x) = \sin^2 x$

Exercice 43. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer I_1.
2. Démontrer que $I_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Calculer I_2 et I_3.
4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x} \, dx$.

Exercice 44. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ et tout $x \geq 0$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

(On utilisera la croissance de l'intégrale).

Semaine 12

Contrôle continu numéro 2 + Révisions