Licence Économie et Gestion
Dumont, Léonard, Mary, Mohamed

Exercices de travaux dirigés

Géométrie de $\mathbb{R}^2$

Semaine 1

Exercice 1. Représenter graphiquement les ensembles suivants :

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 - x^3 = 0\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$

Exercice 2. Représenter pour $z = -1, 0, 1$ et 2 les domaines suivants :

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = z\}$
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = z\}$
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq z\}$
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = z\}$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = z\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \leq z\}$
(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 = z\}$
(h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 > z\}$
(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq z\}$

Exercice 3.

1. Représenter le graphe de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$, et calculer et tracer la tangente au point d'abscisse $x = \frac{1}{2}$.
2. Cette fonction admet-elle une tangente en $x = 1$ et $x = -1$?
3. Déduire (graphiquement) de la question 1 les tangentes au domaine
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$
aux points $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $Q = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.
4. Le domaine admet-il une tangente aux points $P = (1,0)$ et $Q = (-1,0)$?

Semaine 2

Exercice 4. Placer les points P, $P+(u,v)$ et $P+(k,l)$ dans le plan :

(a) $P=(0,0)$, $(u,v)=(-2,2)$, $(k,l)=(1,-1)$.

(b) $P=(-1,1)$, $(u,v)=(-2,2)$, $(k,l)=(1,2)$.

(c) $P=(1,-1)$, $(u,v)=(-2,2)$, $(k,l)=(-1,2)$.

(d) $P=(2,2)$, $(u,v)=(1,0)$, $(k,l)=(0,1)$.

(e) $P=(-1,0)$, $(u,v)=(2,0)$, $(k,l)=(1,1)$.

Exercice 5. Dans l'exercice précédent, les vecteurs (u,v) et (k,l) sont-ils orthogonaux ?

Exercice 6. Calculer le produit scalaire de tout couple de vecteurs choisis parmi

$$(1,1),\ (0,1),\ (1,-5),\ (-1,1)/\sqrt{3}.$$

Lesquels sont orthogonaux ?
Calculer les normes de ces vecteurs.

Exercice 7. Représenter graphiquement les ensembles suivants :

(a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0 \text{ et } y\geq 0\}$

(b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0 \text{ ou } y\geq 0\}$

(c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq 4,\ y\leq 2,\ x+y\geq 3\}$

(d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 4,\ y\geq 2,\ x+y\leq 3\}$

(e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 4,\ y\geq 2,\ x+y\geq 3\}$

(f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq -1,\ x+y\geq 3\}$

(g) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ -x^2\leq y\leq e^x\}$

(h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0,\ -y^2\leq x\leq e^y\}$

(i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2-1, x^2+y^2=1\}$

(j) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2-1, x^2+y^2\geq 1\}$

Fonctions de deux variables

Semaine 3

Exercice 8 (Domaine de définition)**.** Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

(c) $f(x,\, y) = \sqrt{y - x} / \ln x$

Exercice 9 (Lignes de niveau)**.** Soit la fonction

$$f(x,\, y) = x^2 - y^2$$

Déterminer ses lignes de niveau $C_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = z\}$ pour $z = 0$, $z = 1$ et $z = -1$.

Exercice 10 (Fonctions partielles, dérivées partielles)**.** Soit la fonction

$$f(x,\, y) = -y^2 + x$$

1. Tracer sur un même graphique les fonctions partielles $y \to f(x_0, y)$, pour $x_0 = -1, 0, 2$.
2. Tracer sur un même graphique les fonctions partielles $x \to f(x, y_0)$, pour $y_0 = -1, 0, 2$.
3. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

Exercice 11 (Fonctions partielles, dérivées partielles)**.** Calculer les dérivées partielles premières et secondes de

$$f(x,\, y) = xy^2 + \frac{x}{y} - x$$

Exercice 12. Représenter graphiquement trois lignes de niveau pour chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

(c) $f(x,\, y) = x + y$

(d) $f(x,\, y) = (x + y)^2$

Semaine 4

Exercice 13. Soit la fonction d'une variable $g(x) = \exp(2(x-1))$. On définit la fonction de deux variables $f(x,y) = y - g(x)$.

1. Tracer le graphe de g et la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$ (on tracera cette tangente).
2. Calculer le vecteur gradient $\vec{\nabla} f$ en $P = (x_0, y_0)$ (avec $y_0 = g(x_0)$) et le tracer.
3. Calculer le produit scalaire de $\vec{\nabla} f$ avec un vecteur $Q - P$, où Q est un point quelconque de la tangente.

Exercice 14. Représenter graphiquement la ligne de niveau $z = 1$ des fonctions suivantes, et tracer sur le même dessin le vecteur gradient $\vec{\nabla} f$ en $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

(a) $f(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$

(b) $f(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$

(c) $f(x,\, y) = \frac{x+y}{2}$

(d) $f(x,\, y) = \frac{(x+y)^2}{4}$

Exercice 15. Écrire les développements limités d'ordre 2 en $(x_0,\, y_0)$ des fonctions suivantes :

(a) $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$ $\quad f(x,\, y) = 4\, x^2 - y^2$

(b) $(x_0,\, y_0) = (1,\, 1)$ $\quad f(x,\, y) = x\, \log y$

(c) $(x_0,\, y_0) = (0,\, 1)$ $\quad f(x,\, y) = \exp\left(1 + x\, y^2\right)$

(d) $(x_0,\, y_0) = (1,\, 1)$ $\quad f(x,\, y) = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$

Exercice 16. On veut faire des boîtes de 1 m^3 dont la base est un rectangle de côtés x et y.

1. Calculer en fonction de x et y la hauteur que doit avoir la boîte.
2. En déduire que la surface est donnée par la fonction $S(x,\, y) = 2xy + 2/x + 2/y$. Quel est son domaine de définition ?
3. On fixe $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$. Écrire le développement limité d'ordre 1 de S en $(x_0,\, y_0)$.
4. À l'aide de la question précédente, donner (sans calculatrice) une valeur approchée de la surface de carton utilisée quand le rectangle de base est $(x'_0,\, y'_0) = (1.95\,;\, 0.95)$, et comparer au résultat exact.
5. Soit maintenant une base de taille $(x = 1,\, y = 1)$. Établir de manière analogue une valeur approchée de la surface utilisée pour $(x',\, y') = (1.05\,,\, 0.90)$. L'ordre 1 est-il suffisant ?

Optimisation de fonctions d'une variable

Semaine 5

Optimisation sur un intervalle

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3x + 27/x + 4$.

1. Trouver le minimum de f sur l'intervalle $[1, 2]$.
2. Trouver le minimum de f sur l'intervalle $[1, 9]$.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 16x^3/3 + 6x^2 + 1$. Déterminer les minimum et maximum de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 19. Un négociant en vin achète à l'instant 0 une bouteille pour c euros. Sa valeur augmente au cours du temps, de sorte que le prix de vente à l'instant t est $c\ a^{\sqrt{t}}$, où a est un paramètre positif. Si l'on veut tenir compte de l'inflation r et exprimer sa valeur $C(t)$ en euros constants, elle est donc à l'instant t de

$$C(t) = c\ a^{\sqrt{t}} e^{-rt}.$$

À quel moment le négociant a-t-il intérêt à vendre la bouteille ?

Exercice 20. Le service de gestion de l'entreprise Leovia a estimé qu'un investissement de x euros en travail et de y euros en équipements faisait gagner $x\sqrt{y}$ euros. L'entreprise dispose de 100 000 euros à investir, comment le faire de façon optimale ?

Exercice 21. Un sylviculteur produit des arbres dont la valeur unitaire après un temps t est, en euros constants, $\lambda\sqrt{t}$. Pendant une durée t, un arbre coûte $a + bt$ à entretenir, où a, b sont des constantes positives.

À quel moment, en fonction de λ, a, b, est-il préférable de vendre l'arbre ?

Exercice 22. Soit f la fonction définie sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \log(x + 1/x)$.

1. Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.
2. Préciser la nature de chaque point stationnaire.
3. Etudier les variations de f.

Convexité

Exercice 23. Montrer que $x \mapsto e^x - x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Que vaut son minimum ?

Exercice 24. Soit f la fonction réelle définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^4 + 3} - x$.

1. Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.

2. Préciser la nature de chaque point stationnaire.
3. La fonction f est-elle convexe ?

Exercice 25. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue, telle que

$$f(0) < 0, \quad f(1) > 0.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$.
2. En déduire que l'équation $e^x = 2 - x^6$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 26. On pose $f(x) = -5x^4 + x + 0.01$ et on considère la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est concave et faire le tableau de variation. On notera α le maximum global de f.
2. On remarque à la calculatrice que $f(\alpha) < \alpha$. En déduire qu'il existe un unique c compris entre 0 et α tel que $f(c) = c$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ le nombre u_n est dans l'intervalle $[0,c]$.
4. Montrer que, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$. En déduire que (u_n) converge.
5. Quelle est la limite de (u_n) ?

Méthode de substitution

Semaine 6

Exercice 27. Montrer que le problème d'optimisation $\inf\limits_{(x,y)\in D} e^x - \dfrac{x}{y}$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y + x^2 y = 0\}$ est équivalent au problème unidimensionnel $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} e^x + x^2 + 1$.

1. Montrer que la fonction $x \to e^x + x^2 + 1$ est convexe.
2. En déduire que le problème de départ $\inf\limits_{(x,y)\in D} e^x - \dfrac{1}{y}$ admet un unique minimum global.

Exercice 28. En utilisant la méthode de substitution, déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2y - x = 0, 0 \leq x \leq 2\}$.

(a) $f(x,\, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = x^4 - y^2$

(c) $f(x,\, y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)$

(d) $f(x,\, y) = x\left(y^2 + 1\right)$

(e) $f(x,\, y) = x + \log(x\, y)$

(f) $f(x, y) = x^2/y$

Exercice 29. Même exercice avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x^2 + y^2 = 4\}$.

Optimisation libre

Semaine 7-8

Contrôle continu numéro 1 en semaine 7

Exercice 30. Préciser l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Calculer les points stationnaires et préciser leur nature.

(a) $f(x, y) = (x + y)^2$

(b) $f(x, y) = (x + y)^2 + x^2$

(c) $f(x,\, y) = 4\,x^3 - y^2 - 3\,x + 4\,y + 3$

(d) $f(x, y) = x^2/y + (y - 1)^2$

(e) $f(x,\, y) = x + \log(x\, y)$

(f) $f(x,\, y) = x^{1/3}\sqrt{y}, \quad x, y > 0$

(g) $f(x,\, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

(h) $f(x,\, y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)$

Exercice 31. Parmi les fonctions précédentes :

1. lesquelles sont convexes ou concaves ?
2. lesquelles admettent un maximum global, un minimum global ?

Exercice 32. Soit la fonction de Cobb-Douglas $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, avec $x, y > 0$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β pour que f soit strictement concave sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Comparer $f(ax, ay)$ et $af(x, y)$ pour $a \geq 1$ dans le cas concave. (En économie, on parle de rendements d'échelle décroissants).

Optimisation sous contrainte d'égalité

Semaine 8-9

Exercice 33. Soit $f(x,y) = x + y$. On considère $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Trouver les points stationnaires de f sur D par la méthode du lagrangien.
2. En déduire les extrema globaux de f sur D.
3. Comparer avec la méthode de substitution.

Exercice 34. On considère les fonctions suivantes. En utilisant la méthode du lagrangien, déterminer les points stationnaires de f sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2y + x = 1\}$.

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$

(b) $f(x,y) = (x+y)^2 + x^2$

(c) $f(x,\, y) = 4\,x^3 - y^2 - 3\,x + 4\,y + 3$

(d) $f(x,\, y) = x + \log(x\,y)$, (faire attention au domaine)

(e) $f(x,\, y) = x^{1/3}\sqrt{y}$

(f) $f(x,\, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

(g) $f(x,\, y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)$

Exercice 35. On reprend les fonctions suivantes de l'exercice précédent :

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$

(b) $f(x,y) = (x+y)^2 + x^2$

(c) $f(x,\, y) = x + \log(x\,y)$

(d) $f(x,\, y) = x^{1/3}\sqrt{y}, \quad x, y > 0$

Quels sont les points extrémaux de ces fonctions sur le domaine précédent $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2y + x = 1\}$?

Exercice 36. Considérons trois produits A , B de prix unitaires respectivement $p_a = 1$ et $p_b = 2$. Un consommateur possède un revenue $R = 20$.

1. Optimiser la fonction d'utilité $f(x,y) = xy$ où x (resp. y) est la quantité de produits A (resp. B) achetée par le consommateur.
2. Même question avec $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$ (Cobb-Douglas) et $f(x,y) = \log(x) + \log(y)$.
3. Représenter graphiquement le premier problème et sa solution.

Exercice 37. On considère la fonction de Cobb-Douglas $f(x,y) = x^\alpha y^\alpha$ définie sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=12\}$ avec $\alpha \geq 2$ les rendements déchelle sont donc croissants. (on s'autorise pour cet exercice à considérer des x et y négatifs)

1. Trouver les points stationnaires de f sur son domaine de définition.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de α peut-on démontrer l'existence de points d'extremums locaux sur les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Trouver et caractériser un extremum local de f dans le cas $\alpha > 2$.

Calcul intégral

Semaine 10

Exercice 38. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{2}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^2 (1+2x-x^3)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^2 t^7\,dt$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{3t}\,dt$ (f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{2+x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2}{x^3+1}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+1}{(e^x+x)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,dx$ (j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 x - \cos^2 x]\,dx$

Exercice 39. Calculer des primitives des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = e^{-x}$

(b) $f(x) = 4/3x$

(c) $f(x) = x \exp x^2$

(d) $f(x) = (2x+1)(x^2+x)^3$

Exercice 40. Réduire (écrire de manière simplifiée) puis calculer les expressions suivantes

(a) $\displaystyle I = \int_1^2 (x^2-1-x)\,dx + \int_1^2 1+t\,dt + \int_2^3 x^2\,dx$

(b) $\displaystyle J = \int_{-2}^2 (e^{2x}-x)\,dx + \int_{-3}^{-2} e^{2x}\,dx$

(c) $\displaystyle K = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (on écrira $\frac{1}{x^2-1}$ sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$).

Semaine 11

Exercice 41.

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $1 - x \leq \frac{1}{1+x}$.
2. En déduire que pour tout $t > -1$, $t - t^2 \leq \log(1 + t)$.

Exercice 42. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \log t \, dt$

(c) $\displaystyle\int_1^5 x \log x \, dx$

Exercice 43. Calculer des primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par partie :

(a) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

(b) $f(x) = (\log x)^2$

(c) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(d) $f(x) = \sin^2 x$

Exercice 44. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer I_1.
2. Démontrer que $I_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n + 1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Calculer I_2 et I_3.
4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x} \, dx$.

Exercice 45. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ et tout $x \geq 0$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

(On utilisera la croissance de l'intégrale).

Semaine 12

Contrôle continu numéro 2 + Révisions