SF - TD6 - gp1

Base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ = base canonique $\quad \vec{i} = (1,0) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{j} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$B' = (\vec{i}', \vec{j}') : \begin{array}{l} \vec{i}' = (1,2) \\ \vec{j}' = (-1,3) \end{array}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire de matrice dans B $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

- Montrer que B' est une base.
- Trouver M' : matrice de f dans la base B'

On voit que $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ ne sont pas colinéaires.
On a donc une base.

$$\boxed{M' = P^{-1} M P}$$

Nous avons $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\vec{i}' \quad \vec{j}'$ dans B.

Calcul de P^{-1}

par résolution du système linéaire

$$\begin{cases} x - y = u \\ 2x + 3y = v \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \iff \begin{array}{l} 5x = 3u + v \\ 5y = -2u + v \end{array} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $P^{-1}MP$. D'abord MP:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 26 & 24 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow M' = \begin{pmatrix} 26/5 & 24/5 \\ 1/5, & -1/5 \end{pmatrix}$$

D'abord $P^{-1}M$.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 26 & 24 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie que $P^{-1}P = PP^{-1} = I$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 4   Dans $\mathbb{R}^n$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}}_{n} \Big\updownarrow n \qquad A^p = ? \quad \underbrace{A.A.\cdots.A}_{p \text{ fois}}$$

$B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$

f de matrice A dans la base B

$n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} \end{pmatrix}$

$f(\vec{e_1})$ $\quad f(\vec{e_2})$

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = 0.\vec{e_1} + 1\times\vec{e_2} = \vec{e_2} \\ f(\vec{e_2}) = 1.\vec{e_1} + 0.\vec{e_2} = \vec{e_1} \end{cases}$$

$f\circ f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ $\qquad f\circ f(\vec{e_2}) = f(\vec{e_1}) = \vec{e_2}$

Donc $f\circ f = Id$

$$f^p = \underbrace{f\circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$$

$$\begin{cases} f^p = Id & \text{si } p \text{ est pair} \\ f^p = f & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

$A^p = I$ si p est pair

$A^p = A$ si p est impair

$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(\vec{e_1}) = \vec{e_3}$

$f(\vec{e_2}) = \vec{e_2}$

$f(\vec{e_3}) = \vec{e_1}$

$$\boxed{f^2 = Id}$$

$n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(\vec{e_1}) = \vec{e_4}$

$f(\vec{e_2}) = \vec{e_3}$

$f(\vec{e_3}) = \vec{e_2}$

$f(\vec{e_4}) = \vec{e_1}$

$$\boxed{f^2 = Id}$$

$$\Downarrow$$

$$f = f^{-1}$$

$$f^{-5} \overset{def}{=} (f^{-1})^5 = f^5 = f$$

$$\begin{cases} A^{2k+1} = A \\ A^{2k} = I \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$