SF - TD5 - gp2

Exercice 1. On appelle (D) la droite passant par les points $A = (0, -3)$ et $B = (1, 5)$ dans le plan.

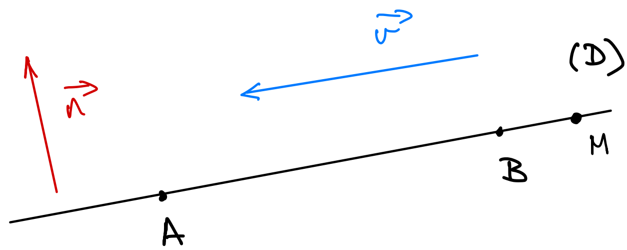
(a) Donner une équation paramétrique de (D).

(b) Donner une équation cartésienne de (D). $\vec{n} \perp \vec{v}$

(a)

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$M = (x, y)$



$\boxed{M \in (D)}$

$\Updownarrow$

$\left[\overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire au vecteur } \vec{v}\right] \Leftrightarrow \left[\exists t \in \mathbb{R}, \text{ t.q } \overrightarrow{AM} = t\vec{v}\right]$

équation paramétrique de (D): $\boxed{\overrightarrow{AM} = t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (*)}$

$\overrightarrow{AM} = (x - x_A, y - y_A) = (x, y+3)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (1, 8)$

$(*) \Leftrightarrow (x, y+3) = t(1, 8) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 8t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$

(b) Equation cartésienne cartésienne d'une droite :

$\vec{n} = (a, b) \leftarrow \boxed{ax + by + c = 0}$

$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0}$

Il faut trouver un $\vec{n}$. On connait $\vec{v} = (k, \ell)$, $k, \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\vec{n} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0}$

$\vec{n} = (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow k\alpha + \ell\beta = 0$

$\alpha = \ell, \quad \beta = -k$

$k\ell - \ell k = 0$

fonctionnent.

application $\vec{v} = (1,8)$, $\vec{n} = (8,-1)$

$\overrightarrow{AM} = (x, y+3)$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff (8,-1)\cdot(x,y+3) = 0$

$\iff 8x - (y+3) = 0 \iff \boxed{8x - y - 3 = 0}$

(b') Si on connait l'équation paramétrique, on retrouve l'équation cartésienne en éliminant t :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 8t \end{cases} \longrightarrow y = -3 + 8x \iff \boxed{8x - y - 3 = 0}$$

Exercice 2.

(a) Déterminer le projeté orthogonal A^* du point $A = (6,1)$ sur la droite (D) d'équation $2x - 3y + 1 = 0$.

(b) Quelle est la distance d du point A à la droite (D) ?

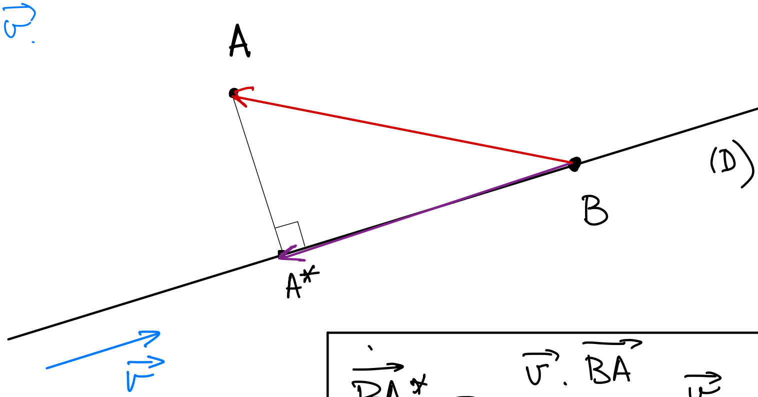
Trouvons B et $\vec{v}$.

$B = (-\frac{1}{2}, 0)$

$B' = (0, \frac{1}{3})$

$\vec{v} = 6\overrightarrow{BB'}$

$= 6 \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = (3,2)$



$$\boxed{\overrightarrow{BA^*} = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \quad (*)}$$

Pour $\vec{v}$ on peut aussi faire,

$2x - 3y + 1 = 0$ $\quad \vec{n} = (2,-3)$

$\vec{v} = (3,2)$

$B = (-\frac{1}{2}, 0)$, $\vec{v}(3,2)$ $\qquad A^* = (x,y) = ?$ à trouver

$$\underbrace{\left(x+\frac{1}{2},\ y\right)}_{\overrightarrow{BA^*}} = \frac{(3,2)\cdot\overbrace{\left(6+\frac{1}{2},\ 1\right)}^{\overrightarrow{BA}}}{3^2+2^2}\,(3,2) = \frac{43}{2\times 13}\,(3,2)$$

$$(3,2)\cdot\left(\frac{13}{2},1\right) = 3\times\frac{13}{2} + 2\times 1 = \frac{43}{2}$$

$$3^2+2^2 = 9+4 = 13$$

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2} = \frac{3\times 43}{2\times 13} \\ y = \frac{2\times 43}{2\times 13} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{3\times 43}{2\times 13} = \frac{58}{13} \\ y = \frac{43}{13} \end{cases}$$

← coordonnées de A^*.

$$x = -\frac{13}{2\times 13} + \frac{3\times 43}{2\times 13} = \frac{116}{2\times 13} = \frac{58}{13}$$

$$\boxed{A_* = \left(\frac{58}{13},\ \frac{43}{13}\right)}$$

(b) $\boxed{dist = \|\overrightarrow{AA_*}\|}$

$$dist^2 = \left(-\frac{20}{13}\right)^2 + \left(\frac{30}{13}\right)^2 = \frac{20^2+30^2}{13^2}$$

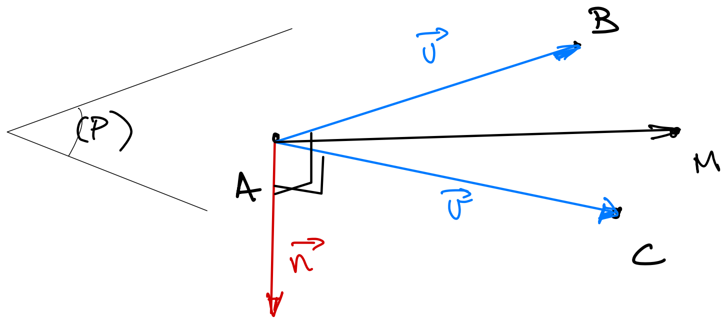
$$\overrightarrow{AA_*} = \left(\frac{58}{13} - 6,\ \frac{43}{13} - 1\right) = \left(\frac{58-6\times 13}{13},\ \frac{43-13}{13}\right)$$

$$= \left(-\frac{20}{13},\ \frac{30}{13}\right)$$

$$dist = \frac{1}{13}\sqrt{20^2+30^2} = \frac{10}{13}\sqrt{2^2+3^2} = \boxed{\frac{10}{\sqrt{13}} = dist}$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{(a,b)}\| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice 3. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, donner l'équation cartésienne du plan (P) passant par les points $A = (0,1,2)$, $B = (5,0,2)$ et $C = (1,3,0)$.



$\vec n \perp (\vec u, \vec v)$

Equation cartésienne : $M \in (P) \iff \vec{AM} \perp \vec n \iff \boxed{\vec n \cdot \vec{AM} = 0}$

$\vec u \wedge \vec v \perp (\vec u, \vec v)$

produit vectoriel

$\vec u = (a, b, c)$

$\vec v = (\alpha, \beta, \gamma)$

$\vec u \wedge \vec v = (b\gamma - \beta c, -a\gamma + \alpha c, a\beta - \alpha b) = \vec n$

$$\begin{matrix} a & \alpha \\ b & \beta \\ c & \gamma \end{matrix} \xrightarrow{\vec u \wedge \vec v} \begin{matrix} b\gamma - \beta c \\ -(a\gamma - \alpha c) \\ a\beta - \alpha b \end{matrix}$$

$$0 = \vec u \cdot \vec n = a(\cancel{b\gamma} - \cancel{\beta c}) + b(-\cancel{a\gamma} + \cancel{\alpha c}) + c(\cancel{a\beta} - \cancel{\alpha b}) = 0$$

$$\vec v \cdot \vec n = \alpha(\cancel{b\gamma} - \cancel{\beta c}) + \beta(-\cancel{a\gamma} + \cancel{\alpha c}) + \gamma(\cancel{a\beta} - \cancel{\alpha b}) = 0$$

Application

$\vec u = \vec{AB} = (5, -1, 0)$

$\vec v = \vec{AC} = (1, 2, -2)$

$\vec n = (2, 10, 11)$

$M = (x, y, z)$

$\vec{AM} = (x, y-1, z-2)$

$\vec n \cdot \vec{AM} = 0 \iff 2x + 10(y-1) + 11(z-2) = 0$

$\iff \boxed{2x + 10y + 11z - 32 = 0}$

$A = (0, 1, 2)$

$B = (5, 0, 2)$

$C = (1, 3, 0)$

OK

Exercice 4.

(a) À l'aide d'un système d'équations, trouver l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Même question avec la matrice $N = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{cases} -x + 2y = u \\ 5x + 4y = v \end{cases} \iff M.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Si M est inversible, on notera M^{-1} son inverse : $MM^{-1} = M^{-1}M = I$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\underbrace{\underbrace{M^{-1}M}_{I}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = M^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ Par conséquent.

$\boxed{(1) \quad M.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ solution de (1)

$\iff M^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

système
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ inconnu
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ paramètre

système
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: inconnu $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: paramètre

Calculer M^{-1}, c'est résoudre le système (1).

Au sujet de la matrice I. $\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\boxed{IA = AI = A}$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{matrix} \leftarrow IA = A$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{matrix} \leftarrow AI = A$$

$$\begin{cases} -x + 2y = u \\ 5x + 4y = v \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 7x = -2u + v \\ \rightarrow 14y = 5u + v \end{array} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{7}u + \frac{1}{7}v \\ y = \frac{5}{14}u + \frac{1}{14}v \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 \\ 5/14 & 1/14 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 \\ 5/14 & 1/14 \end{pmatrix}}$$

Vérif

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 \\ 5/14 & 1/14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 \\ 5/14 & 1/14 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$L_1 = L_2 + 3L_3$$

Exercice 5. Montrer à l'aide d'un système d'équations que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

<u>Thm</u> La matrice carrée A est inversible si et seulement si le syst. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ admet une unique solution pour chaque (u,v,w).

$\forall U$, $AX = U$ admet une unique solution X

Donc A n'est pas inversible ssi il existe (u,v,w) tel que :
- soit il n'y a pas de sol.
- soit il y a strictement plus qu'une solution

$$\begin{cases} 6x + y = u \\ y + 9z = v \longrightarrow y + 9\left(\frac{2}{3}x - \frac{w}{3}\right) = v \longrightarrow 6x + y = v + 3w \\ 2x - 3z = w \longrightarrow 3z = 2x - w \longrightarrow z = \frac{2}{3}x - \frac{w}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + y = u \\ 6x + y = v + 3w \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = v + 3w}$$

Donc, pour tout (u,v,w) tel que $u \neq v + 3w$, le système n'admet pas de solution. Par conséquent A n'est pas inversible.

On reprend à 16:00