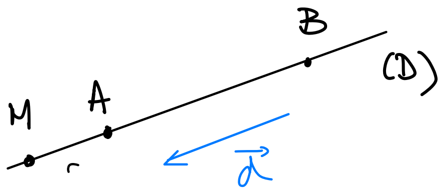
SF- SPI - TD5 - gp1

Exercice 1. On appelle (D) la droite passant par les points $A = (-1, -3)$ et $B = (2, 3)$ dans le plan.

(a) Donner une équation paramétrique de (D).

(b) Donner une équation cartésienne de (D).



(a) on a besoin d'un vecteur directeur $\vec{d}$ de (D) et d'un point.

Le point $\boxed{M \in (D)}$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{d}$.

L'équation paramétrique est : $\boxed{\overrightarrow{AM} = t\,\vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}}$ $(*)$

Prenons $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2+1, 3+3) = \underbrace{(3,6)}_{\vec{d}}$

Les coordonnées de M sont (x,y) :

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_A, y - y_A) = (x+1, y+3)$$

On écrit $(*)$: $(x+1, y+3) = t\,(3,6) = (3t, 6t)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3t \\ y+3 = 6t \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1+3t \\ y = -3+6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}} \quad (*)$$

(b) Equation cartésienne : $ax + by + c = 0$

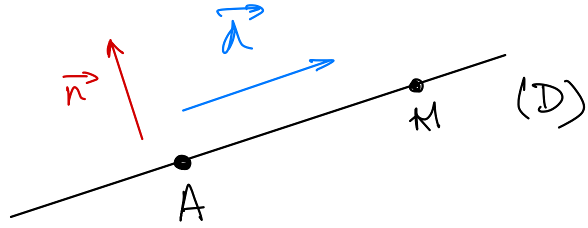
1ère méthode

On élimine t dans $(*)$:

$x = -1 + 3t \longrightarrow t = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

$y = -3 + 6t \longrightarrow y = -3 + 6\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right) \Longleftrightarrow \boxed{2x - y - 1 = 0}$

2ème méthode On connait A et $\vec{d}$



$$\boxed{\vec{n} \perp \vec{d} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{d} = 0}$$

$$\boxed{M=(x,y) \in (D) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \quad (**)}$$

Avec $\vec{d} = (\alpha, \beta)$ on voit que $\vec{n} = (\beta, -\alpha) \perp \vec{d}$

car $\vec{n}\cdot\vec{d} = (\beta,-\alpha)\cdot(\alpha,\beta) = \beta\alpha - \alpha\beta = 0$

$\vec{n} = (a, b)$ $AM = (x - x_A, y - y_A)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \Longleftrightarrow a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0$

$\Longleftrightarrow \boxed{ax + by + c = 0}$

avec $c = -(ax_A + by_A)$.

Application $\vec{d} = (3, 6)$ $\overrightarrow{AM} = (x+1, y+3)$

$\downarrow$

$\vec{n} = (6, -3)$

$\boxed{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0} \Longleftrightarrow (6,-3)\cdot(x+1, y+3) = 0$ $\boxed{2x - y - 1 = 0}$

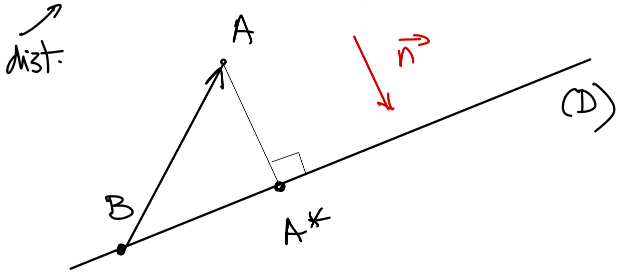
$\Longleftrightarrow 6(x+1) - 3(y+3) = 0 \Longleftrightarrow 6x - 3y - 3 = 0$

$(\times 1/3) \Longleftrightarrow \boxed{2x - y - 1 = 0}$

Exercice 2.

(a) Déterminer le projeté orthogonal A^* du point $A = (3,1)$ sur la droite (D) d'équation $x - 3y + 2 = 0$.

(b) Quelle est la distance d du point A à la droite (D) ?



$\boxed{x - 3y + 2 = 0}$ $\quad \vec{n} = (1, -3) \longrightarrow \boxed{\vec{d} = (3,1)}$

$B \in (D)$.
$$\boxed{\overrightarrow{BA^*} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \vec{d}} \quad (*)$$

Rem :

Avec $\vec{u} = \dfrac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$ alors $\|\vec{u}\| = 1$ et $\overrightarrow{BA^*} = (\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u})\, \vec{u}$

On prend n'importe quel point $B \in (D)$. Par exemple

$B = (-2, 0)$. Soit $A^* = (x, y)$. $\boxed{\overrightarrow{BA^*} = (x+2, y)}$

$\boxed{\overrightarrow{BA} = (3+2, 1-0) = (5,1)}$

$$(*) \longrightarrow (x+2, y) = \frac{(5,1) \cdot (3,1)}{3^2 + 1^2} (3,1) = \frac{16}{10} (3,1) = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \frac{24}{5} \longrightarrow x = -2 + \frac{24}{5} = \frac{14}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Donc $\boxed{A^* = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}\right)}$

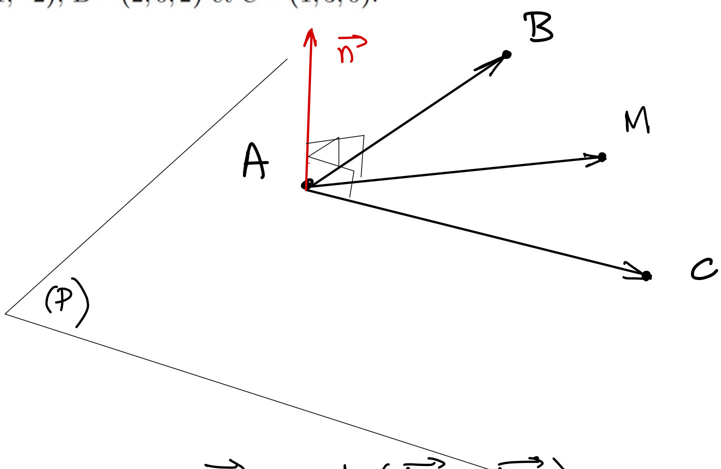
(b) $\boxed{dist = \|\overrightarrow{AA^*}\|}$ $\quad A = (3,1) \quad A^* = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}\right)$

$$\overrightarrow{AA^*} = \left(\frac{14}{5} - 3, \frac{8}{5} - 1\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\|\overrightarrow{AA^*}\|^2 = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}(1+9) = \frac{10}{25}$$

$$dist = \sqrt{\frac{10}{25}}$$

Exercice 3. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, donner l'équation cartésienne du plan (P) passant par les points $A = (0,-1,-2)$, $B = (2,0,2)$ et $C = (1,3,0)$.



$M \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \in \text{vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ← par l'équation paramétrique.

$\iff \boxed{\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}}$ avec $\boxed{\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}}$

$\Updownarrow$

$M \in (P) \iff \boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0}$ (*) ← équation cartésienne.

$M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{AM} = (x-0, y-(-1), z-(-2)) = (x, y+1, z+2)$

Il reste à trouver $\vec{n}$. On choisit $\boxed{\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}$

$\vec{AB} = (2,1,4) \quad \vec{AC} = (1,4,2)$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-14, 0, 7) = \vec{n}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\gamma - \beta c \\ -(a\gamma - \alpha c) \\ a\beta - \alpha b \end{pmatrix}}$$

$\left((1\times 2 - 4\times 4), -(2\times 2 - 1\times 4), (2\times 4 - 1\times 1) \right)$

Exercice : Vérifier que
$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$
$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

$(*)$ s'écrit : $(-14, 0, 7) \cdot (x, y+1, z+2) = 0 \iff -14x + 7(z+2) = 0$

$\times \left(-\frac{1}{7}\right)$

$\iff \boxed{2x - z - 2 = 0} \quad (**)$

Vérif

$A = (0, -1, -2)$
$B = (2, 0, 2)$
$C = (1, 3, 0)$
$\longrightarrow (**)$

Exercice 4.

(a) À l'aide d'un système d'équations, trouver l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Même question avec la matrice $N = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, de sorte que :

$$MX = U \iff \begin{cases} -x + 3y = u \\ 3x + 4y = v \end{cases} \quad (*)$$

M est inversible ssi pour tout $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ le système admet une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$-x + 3y = u \longrightarrow x = 3y - u$

$3x + 4y = v \longrightarrow 3(3y - u) + 4y = v$

$\iff 13y = 3u + v \iff y = \frac{3}{13}u + \frac{v}{13}$

$$x = 3y - u = 3\left(\frac{3}{13}u + \frac{v}{13}\right) - u = -\frac{4}{13}u + \frac{3}{13}v$$

$$(*)\begin{cases} -x + 3y = u \\ 3x + 4y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{4}{13}u + \frac{3}{13}v \\ y = \frac{3}{13}u + \frac{v}{13} \end{cases}$$

$$\iff X = \underbrace{\begin{pmatrix} -4/13 & 3/13 \\ 3/13 & 1/13 \end{pmatrix}}_{= M^{-1}} U \qquad \iff (*) : MX = U \iff X = M^{-1}U$$

Exercice 5. Montrer à l'aide d'un système d'équations que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad U \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad AX = U \iff \begin{cases} 2x \quad\quad -3z = u \\ \quad\quad y + 6z = v \\ 4x + y \quad\quad = w \end{cases}$$

$\boxed{\text{A est inversible ssi pour tout } U \text{ le système } AX = U \text{ admet une unique solution } X.}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{A n'est pas inversible ssi il existe un } U \text{ tel que } AX = U}$
- admette plusieurs solutions
- ou
- n'admette aucune solution.

$$\begin{cases} 2x \quad - 3z = u \\ \boxed{y + 6z = v} \\ 4x + y \quad = w \end{cases}$$

$2x - 3z = u \longrightarrow x = \frac{1}{2}(u + 3z)$

$4x + y = w \longrightarrow y = w - 4\,\frac{1}{2}(u+3z)$

$L_3 - 2L_1 = L_2$

$\longrightarrow y = w - 2u - 6z$

$w - 2u - \cancel{6z} + \cancel{6z} = v \Rightarrow \boxed{w - 2u = v}$

On vient que montrer que si $AX = U$ admet une solution, alors $w - 2u = v$. Par conséquent, si $w - 2u \neq v$, $AX = U$ n'admet pas de solution.

Donc A n'est pas inversible.