SF_ TD4_ gp2

Exo 1 (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1-1 \\ 3+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$3\times(-1) + 2\times 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le produit de matrices ne commute pas en général

(b)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$3\times(-1) + 1\times 4 + 4\times 1$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

produit impossible

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ <u>Analogie</u> $ax = u \iff x = \frac{u}{a} = a^{-1}u$ (si $a \neq 0$)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$AX = U \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = u \\ 3x + 2y = v \end{cases}$$

à résoudre en (x, y) avec (u, v) paramètre.

$$\begin{cases} 2x + y = u \\ 3x + 2y = v \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = 2u - v \\ y = -3u + 2v \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}^{U}$$

$\Downarrow$

$$2 \times (2x + \cancel{y}) + (-1) \times (3x + \cancel{2y}) = 2 \times u + (-1) v \Rightarrow x = 2u - v$$

$$3 \times (\cancel{2x} + y) + (-2) \times (\cancel{3x} + 2y) = 3 \times u + (-2) v \Rightarrow -y = 3u - 2v \Rightarrow y = -3u + 2v$$

$$AX = U \iff X = \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}} U$$

$\Downarrow$

$$A^{-1}AX = A^{-1}U$$

On doit avoir $A^{-1}A = I$

où : $\boxed{IX = X \ , \forall X}$ $I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$$\begin{cases} ax + by = x \\ cx + dy = y \end{cases} , \forall x, y$$ en particulier

$x = 1, y = 0 \rightarrow a = 1, c = 0$

$x = 0, y = 1 \rightarrow b = 0, d = 1$

$\Downarrow$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on voit que $IX = X$

Donc $IX = X, \forall X \iff I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identité

Calculons $A^{-1}A$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{I}$$

Thm Si il existe une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I$ alors on a aussi $AA^{-1} = I$.

vérif

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\boxed{A^{-1} = ?}$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\0&0&5\end{pmatrix} = A \quad \left\{\begin{array}{l} 2x+y = u \\ 3x+2y = v \\ 5z = w \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 2u-v \\ y = -3u+2v \\ z = w/5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2u-v \\ y = -3u+2v \\ z = w/5 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&2&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix} = A \qquad A^{-1} = ?$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y = u \\ 4x+2y = v \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}\right. \implies \underbrace{0x+0y}_{0} = 2u-v$$

Si (u,v) est tel $2u-v \neq 0$, alors le système n'a pas de solution

En revanche, si (u,v) tel que $2u - v = 0$

$\Leftrightarrow v = 2u$

alors le système devient

$$\begin{cases} 2x+y = u \\ 4x+2y = 2u \end{cases} \Leftrightarrow 2x+y = u$$

↑ équation d'une droite.

il y a une $\infty^{té}$ de solutions.

A^{-1} n'existe pas.