Structures fondamentales. TD3 - groupe 2

Equation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{ax+by+cz=d} \quad (*)$$

équation cartésienne

Prenons un point M_0 de l'ensemble : $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ (x,y,z)\in(*)\}$

Soit (x_0,y_0,z_0). Donc $\boxed{ax_0+by_0+cz_0=d \quad (*)_0}$

Soit $M=(x,y,z)\in E$. Par soustraction : $(*)-(*)_0$:

$$a\underbrace{(x-x_0)}_{u}+b\underbrace{(y-y_0)}_{v}+c\underbrace{(z-z_0)}_{w}=0 \qquad \begin{cases} u=x-x_0 \\ v=y-y_0 \\ w=z-z_0 \end{cases}$$

$$\boxed{au+bv+cw=0}$$

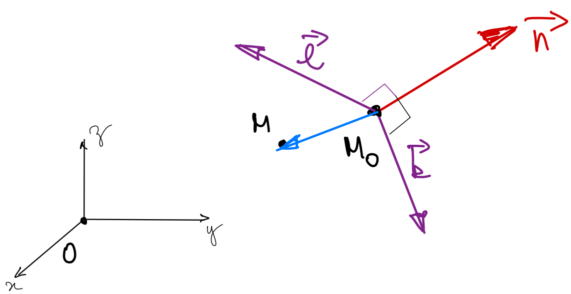
$$\Longleftrightarrow$$

$$(a,b,c)\cdot(u,v,w)=0 \iff \overbrace{(a,b,c)}^{\vec{n}} \perp (u,v,w)$$

Ce qui signifie que (u,v,w) appartient au plan orthogonal à $\vec{n}$

$$(u,v,w)=\overrightarrow{M_0M}$$

Ceci signifie que l'ensemble des $M\in E$ est un plan parallèle au plan vectoriel (c'à d. qui passe par $(0,0,0)$) orthogonal à $\vec{n}$ et qui passe par le point M_0.



$\overrightarrow{M_0M} \in \text{vect}(\vec{k}, \vec{l})$ avec $\vec{k} \perp \vec{n}$ et $\vec{l} \perp \vec{n}$

et $(\vec{k}, \vec{l})$ non colinéaires.

<u>Revenons à (*)</u>. a, b, c sont les coordonnées de $\vec{n}$ perpendiculaire au plan. Et d est donné par $(*)_0$.

Soit $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

<u>Equation paramétrique.</u>

$M = (x, y, z)$

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M} \in \text{vect}(\vec{k}, \vec{l})} \quad (**)$$

Si on connaît :

$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{k} = (x_k, y_k, z_k)$, $\vec{l} = (x_l, y_l, z_l)$

Alors $(**)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{M_0M} = s\vec{k} + t\vec{l}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\begin{cases} x - x_0 = s x_k + t x_l \\ y - y_0 = s y_k + t y_l, \quad s, t \in \mathbb{R}. \\ z - z_0 = s z_k + t z_l \end{cases}}$$

Exercice 4 $\quad A = (0,0,1),\ B = (1,0,0),\ C = (0,1,0)$

Equation paramétrique: $\quad M = (x,y,z)$ t.q.

$$\vec{AM} = s\,\vec{AB} + t\,\vec{AC}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

$$\vec{AM} = (x - x_A,\ y - y_A,\ z - z_A) = (x, y, z-1)$$

$$\vec{k} = \vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) = (1, 0, -1)$$

$$\vec{l} = \vec{AC} = (0, 1, -1)$$

$$(x, y, z-1) = s(1,0,-1) + t(0,1,-1) \iff$$

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \Longrightarrow z = 1 - x - y \Rightarrow x + y + z = 1$$

$$A = (1,0,3) \qquad B = (2,-1,-1) \qquad C = (-3,0,5)$$

$$\vec{k} = \vec{CB} = (5,-1,-6)$$

$$\vec{l} = \vec{CA} = (4, 0, -2)$$

Equation cartésienne $\quad \vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{l} / 2$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

?

$$1 \times x - 7y + 2z = d \longrightarrow x - 7y + 2z = d$$

$$A: d = x_A - 7y_A + 2z_A = 1 - 0 + 2 \times 3 = 7$$

$$\boxed{x - 7y + 2z = 7}$$

$B = (2, -1, -1)$ $C = (-3, 0, 5)$

$B: \quad x_B - 7y_B + 2z_B = 2 + 7 - 2 = 7$

$C: \quad -3 + 0 + 10 = 7.$