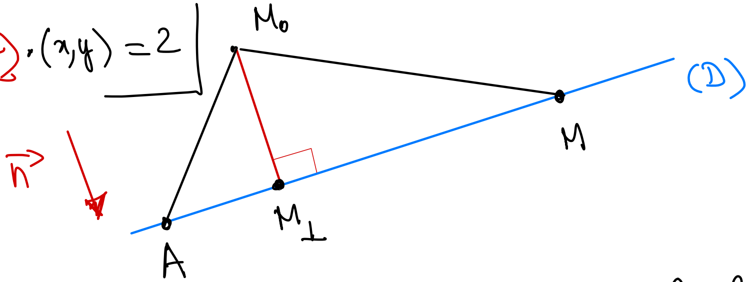
TD2 - groupe 2

(on commence à 16:10 pour souffler un peu).

Exercice 3

Déterminer le projeté orthogonal du point $M_0 = (x_0, y_0)$ sur la droite d'équation : (D): $3x - 4y = 2$.

(D): $\underbrace{(3,-4)}_{\vec{n}} \cdot (x,y) = 2$



Définissons M_* comme le point de (D) le plus proche de M_0

Montrons que $\boxed{M_* = M_\perp}$

preuve. Soit $M \in (D)$. Alors Pythagore nous dit que :

$$\|\overrightarrow{M_0M}\|^2 = \|\overrightarrow{M_0M_\perp}\|^2 + \underbrace{\|\overrightarrow{M_\perp M}\|^2}_{\geq 0} \geq \|\overrightarrow{M_0M_\perp}\|^2, \quad \forall M \in (D)$$

Or $M_\perp \in (D)$. Donc il est le plus de M_0 parmi les points de (D)

Soit $M_\perp = M_*$ $\square$

On fixe $A \in (D)$. Par exemple $A = (1, \frac{1}{4})$

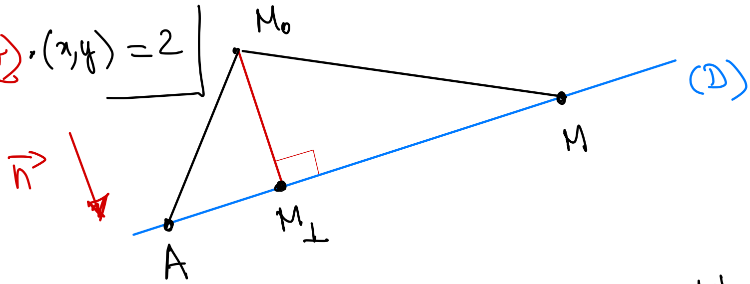
Montrons que : $\vec{n} \perp \overrightarrow{AM}, \ \forall M \in (D)$

En effet, $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-\frac{1}{4})$

car $M \in (D)$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 3(x-1) - 4(y - \tfrac{1}{4}) = 3x - 4y - 2 = 0$$

$(D) : \underbrace{(3,-4)}_{\vec{n}} \cdot (x,y) = 2$



$\overrightarrow{M_0M_\perp} = \lambda \vec{n}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$M_\perp \in (D)$

$$\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AM_\perp} + \overrightarrow{M_\perp M_0} = \underbrace{\overrightarrow{AM_\perp}}_{\perp \vec{n}} - \lambda \vec{n}$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} = \underbrace{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_\perp}}_{=0} - \lambda\, \vec{n} \cdot \vec{n} = -\lambda \|\vec{n}\|^2}$$

$(\vec{n} \neq \vec{0})$

Soit $\lambda = -\dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0}}{\|\vec{n}\|^2}$

$\vec{n} = (3,-4)$

$\overrightarrow{M_0A} = \left(1 - x_0, \frac{1}{4} - y_0\right)$

$$\overrightarrow{M_0M_\perp} = -\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0A}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

$$(x_\perp - x_0, y_\perp - y_0) = \frac{3 \times (1 - x_0) - 4\left(\frac{1}{4} - y_0\right)}{25}(3,-4) \Longrightarrow$$

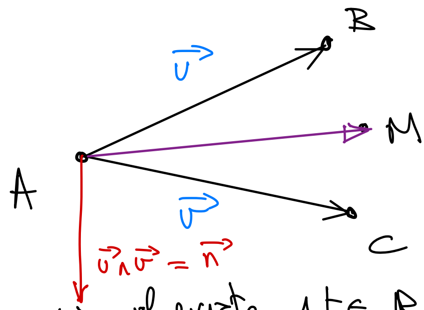
$$\boxed{\begin{aligned} x_\perp &= x_0 + \frac{3}{25}\left(3(1-x_0) - 4\left(\tfrac{1}{4} - y_0\right)\right) \\ y_\perp &= y_0 - \frac{4}{25}\left(3(1-x_0) - 4\left(\tfrac{1}{4} - y_0\right)\right) \end{aligned}}$$

Exercice 4 Trouver l'équation du plan (P) défini par

$A, B, C \in (P)$ $\qquad$ $M = (x, y, z)$

$A = (1,1,1)$ $\qquad$ $B = (2,0,1)$ $\qquad$ $C = (-1,2,4)$

$M \in (P)$
$\iff$
$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$



$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} \end{array}\right\}$ vecteurs directeurs.

$A \in (P)$

$M \in (P) \iff$ il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\boxed{\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}}$

Equation paramétrique de (P)

$\overrightarrow{AM} = (x-1, y-1, z-1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2, 1, 3)$

$$(x-1, y-1, z-1) = s \times (1, -1, 0) + t \times (-2, 1, 3) = (s - 2t, -s + t, 3t)$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + s - 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

$A = (x_A, y_A, z_A)$ $B = (x_B, y_B, z_B)$	$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A)$$
$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

$\vec{u} = \vec{AB} = (1, -1, 0)$

$\vec{v} = \vec{AC} = (-2, 1, 3)$

$$\underset{\vec{u}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}} \underset{\wedge}{\wedge} \underset{\vec{v}}{\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{n}}$$

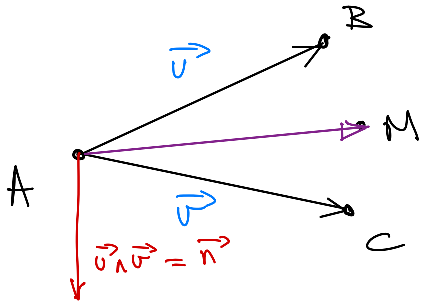
$M \in (P)$

$\Longleftrightarrow$

$\vec{AM} \perp \vec{n}$

$\Longleftrightarrow$

$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0}$



$\vec{AM} = (x-1, y-1, z-1)$

$$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \Longleftrightarrow -3(x-1) - 3(y-1) - 1(z-1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow -3x - 3y - z + 7 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{3x + 3y + z - 7 = 0}$$

Equation cartésienne du (P).