SF _ TD2 _ groupe 1

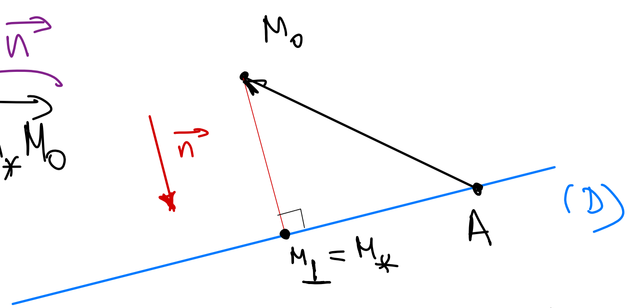
Structures fondamentales

Exo 3 (feuille 1)

Quel est le projeté orthogonal du point (x_0, y_0) sur la droite d'équation $2x - 3y = 5$?

$M = (x_0, y_0)$

$$\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AM_*} + \overbrace{\overrightarrow{M_*M_0}}^{= \lambda \vec{n}}$$



M_* est le point le plus proche de M_0 parmi tous les points de (D).
On l'appelle le projeté orthogonal de M_0 sur (D)

Montrons que $M_* = M_\perp$

preuve.

Pythagore. $\|\overrightarrow{M_0M}\|^2 = \|\overrightarrow{M_0M_\perp}\|^2 + \overbrace{\|\overrightarrow{MM_\perp}\|^2}^{\geq 0} \Rightarrow$

$\forall M \in (D)$, $\|\overrightarrow{M_0M}\|^2 \geq \|\overrightarrow{M_0M_\perp}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{M_0M}\| \geq \|\overrightarrow{M_0M_\perp}\|$

Donc $M_\perp$ est le point de (D) le plus proche de M_0.

C'est-à-dire $M_\perp = M_*$ □

$\boxed{(D) : \ 2x - 3y = 5}$ $\qquad 2 \cdot x + (-3) \cdot y = 5$

$\boxed{\vec{n} = (2, -3) \text{ est perpendiculaire à } (D).}$

Prenons deux points quelconques de (D) : A et M.

$A=(\alpha,\beta)$ $\qquad M=(x,y)$ $\qquad \overrightarrow{AM}=(x-\alpha,\ y-\beta)$

$A\in(D)$: $2\alpha-3\beta=5$ (1)

$x\in(D)$: $2x-3y=5$ (2) $\Longrightarrow$ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

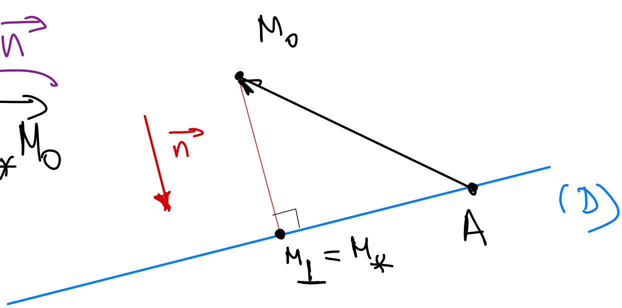
signifie : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$

$(2)-(1)\longrightarrow\ 2x-3y-(2\alpha-3\beta)=5-5$

$$\Longleftrightarrow 2(x-\alpha)+(-3)(y-\beta)=0$$

$$\Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$$

$$\overrightarrow{AM_0}=\overrightarrow{AM_*}+\overbrace{\overrightarrow{M_*M_0}}^{=\lambda\vec{n}}$$



$$\underbrace{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM_0}}_{\text{connu}}=\underbrace{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM_*}}_{=0}+\underbrace{\vec{n}\cdot(\lambda\vec{n})}_{\lambda\vec{n}\cdot\vec{n}=\lambda\|\vec{n}\|^2}$$

$$(2,-3)\cdot(x_0-\alpha,\ y_0-\beta)=\lambda\left(2^2+(-3)^2\right)$$

Choisissons (α,β). par exemple $\alpha=1$, $\beta=-1$

$$2(x_0-1)-3(y_0+1)=13\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{13}\left(2(x_0-1)-3(y_0+1)\right)$$

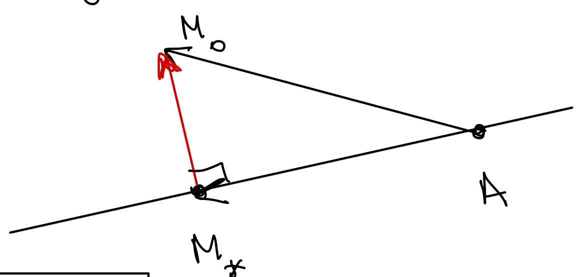
$$M_* = (x_*, y_*) = ?$$

$$\overrightarrow{M_*M_0} = \lambda \vec{n} \iff (x_* - x_0, y_* - y_0) = \lambda(2,-3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_* &= x_0 + \frac{2}{13}\Big(2(x_0-1) - 3(y_0+1)\Big) \\ y_* &= y_0 - \frac{3}{13}\Big(2(x_0-1) - 3(y_0+1)\Big) \end{aligned}}$$

$M_0 = (0,-3)$ $\qquad\qquad$ $M_* = (x_*, y_*)$

(D): $\quad x + 5y = 2$ $\qquad\qquad$ $\vec{n} = (1,5)$



$(*)$ $\boxed{M_*M_0 = \lambda \vec{n}}$ $\qquad\qquad$ $A = (-3, 1)$

$$\lambda \|\vec{n}\|^2 = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM_0} \iff 26\lambda = \overbrace{(1,5)}^{\vec{n}} \cdot \overbrace{(-3-0, 1+3)}^{\overrightarrow{AM_0}}$$

$$26\lambda = -3 + 20 = 17 \implies \lambda = 17/26$$

$(*) \longrightarrow \left(x_* - 0\,,\ y_* + 3\right) = \frac{17}{26}\left(1, 5\right)$

donc $x_* = \frac{17}{26}\,,\quad y_* = -3 + \frac{5 \times 17}{26}\,.$