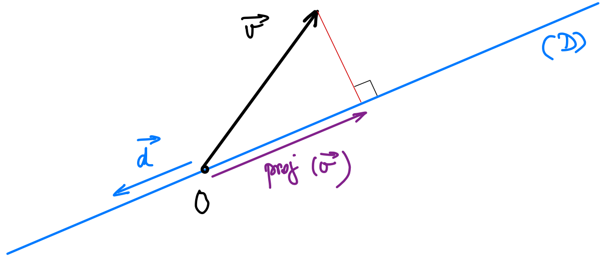
Projection sur une droite vectorielle

Soit (D) la droite <u>vectorielle</u> (c.-à-d. passant par $O=(0,0)$) de vecteur directeur $\vec{d}$.



La projection orthogonale de $\vec{v}=(x,y)$ sur (D) est le vecteur

$$\boxed{\mathrm{proj}\,(\vec{v}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}}$$

On constate que proj satisfait la relation :

$$\boxed{(*)\quad f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v}),\qquad \forall\, \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2,\ \forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$$

(en remplaçant proj par f, bien entendu)

car $\quad \vec{d}\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda\,\vec{d}\cdot\vec{u} + \mu\,\vec{d}\cdot\vec{v}$.

> Par définition, on dit que de toute application $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ qui satisfait $(*)$ qu'elle est une application linéaire.

Rentrons plus dans les détails du calcul des coordonnées en précisant que $\vec{d} = \alpha\,\vec{i}+\beta\,\vec{j}$.

Quelles sont les coordonnées (x',y') de $\mathrm{proj}(\vec{v}) = x'\vec{i}+y'\vec{j}$ en fonction des coordonnées (x,y) de $\vec{v} = x\vec{i}+y\vec{j}$?

On voit que :

$$\text{proj}(\vec{v}) = \text{proj}(x\vec{i} + y\vec{j}) \overset{(*)}{=} x\,\text{proj}(\vec{i}) + y\,\text{proj}(\vec{j})$$

$$= x\underbrace{(a\vec{i} + \alpha\vec{j})}_{=\text{proj}(\vec{i})} + y\underbrace{(b\vec{i} + \beta\vec{j})}_{=\text{proj}(\vec{j})} = (ax+by)\vec{i} + (\alpha x+\beta y)\vec{j}$$

où (a,α) et (b,β) sont les coordonnées respectives de $p(\vec{i})$ et $p(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. Soit

$$\boxed{\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = \alpha x + \beta y \end{cases}}$$

On écrit cette relation de la façon symbolique suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ avec la règle de calcul :

produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \alpha x + \beta y \end{pmatrix}$$

où

$$ax + by = \boxed{a \quad b}\boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} = ax + by$$

(multiplication ligne par colonne)

$$\alpha x + \beta y = \boxed{\alpha \quad \beta}\boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} = \alpha x + \beta y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{coordonnées}}$ de : $\text{proj}(\vec{v})$ $\quad \text{proj}(\vec{i})$ $\quad \text{proj}(\vec{j})$ $\quad \vec{v}$

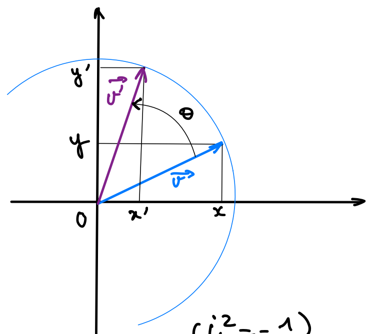
$\boxed{\text{dans la base } (\vec{i},\vec{j})}$

Revenons à notre projection orthogonale. Avec $\vec{d} = d\vec{i} + \delta\vec{j}$, on a :

$$\text{proj}(\vec{v}) = \frac{dx + \delta y}{d^2 + \delta^2}\left(d\vec{i} + \delta\vec{j}\right) = x'\vec{i} + y'\vec{j}. \quad \text{Soit}$$

$$\begin{cases} x' = d\,\dfrac{dx + \delta y}{d^2 + \delta^2} \\ y' = \delta\,\dfrac{dx + \delta y}{d^2 + \delta^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{d^2+\delta^2} & \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} \\ \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} & \dfrac{\delta^2}{d^2+\delta^2} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de la projection proj dans la base } (\vec{i}, \vec{j})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotation Considérons maintenant l'application qui à tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ associe $r_\theta(\vec{v})$: rotation d'angle θ du vecteur $\vec{v}$.



$$\begin{cases} \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{cases}$$

$(i^2 = -1)$

affixe de $\vec{v}$: $z = x + iy$; affixe de $\vec{v}'$: $x' + iy'$, $z, z' \in \mathbb{C}$

$$z' = e^{i\theta} z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{matrice de la rotation d'angle } \theta \text{ dans la base } (\vec{i}, \vec{j})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On constate que l'application $\vec{v} \longmapsto r_\theta(\vec{v}) = \vec{v}'$ satisfait $(*)$

puisque $(\lambda z + \mu \tilde{z})' := e^{i\theta}(\lambda z + \mu \tilde{z}) = \lambda \underbrace{e^{i\theta} z}_{z'} + \mu \underbrace{e^{i\theta}\tilde{z}}_{\tilde{z}'} = \lambda z' + \mu \tilde{z}'$

$\boxed{\text{L'application } r_\theta \text{ est donc linéaire.}}$

Ceci se traduit par les relations matricielles :

$$\boxed{R_\theta(X+\tilde{X}) = R_\theta X + R_\theta \tilde{X}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_\theta(\lambda X) = \lambda R_\theta X},$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

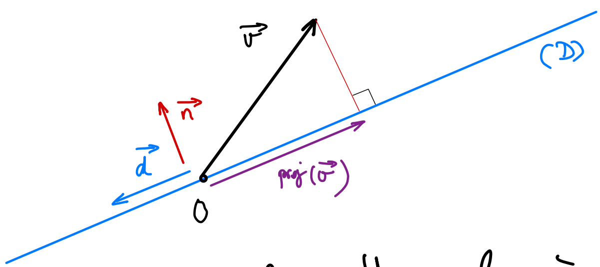
On constate que c'est une conséquence générale de la définition du produit de matriciel introduit plus haut.

Pour toutes matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\boxed{A(\lambda X + \mu X') = \lambda AX + \mu AX'}$$

(relation de linéarité du point de vue matriciel).

Projection orthogonale sur une droite (le retour)



Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{d}$. Puisque $(\vec{d}, \vec{n})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\vec{v}$ et $p(\vec{v})$ admettent des décompositions uniques :

$\vec{v} = s\vec{d} + t\vec{n}$ et $p(\vec{v}) = s'\vec{d} + t'\vec{n}$

Or $\text{proj}(\vec{v}) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}\vec{d} = \vec{d}\cdot(s\vec{d} + t\vec{n})\dfrac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} = \left(s\|\vec{d}\|^2 + \overbrace{t\vec{n}\cdot\vec{d}}^{=0}\right)\dfrac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}$

$= s\vec{d}$

Soit $s' = s$, $t' = 0$.

On constate alors qu'avec $S = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix}$, on obtient

$$S' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de proj dans la base } (\vec{d}, \vec{n})} S$$

Matrice d'une application linéaire

On se donne une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que

$$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} \end{cases} \quad \text{alors}$$

$$f(x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath}) = x_1 f(\vec{\imath}) + x_2 f(\vec{\jmath}) = x_1(a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}) + x_2(b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath})$$

$$= (ax_1 + bx_2)\vec{\imath} + (\alpha x_1 + \beta x_2)\vec{\jmath} = y_1\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$$

$$\begin{array}{cc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$Y = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ \alpha \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ \beta \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de } f \text{ dans la base } (\vec{\imath}, \vec{\jmath})} X, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

matrice colonne des coefficients de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

matrice colonne des coefficients de $f(\vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

On voit que l'application linéaire f est entièrement déterminée par l'image $(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}))$ de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La matrice

$$M := \begin{array}{cc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ \alpha \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ \beta \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

concentre toute l'information.

Matrice d'une composition d'applications linéaires

On se donne deux applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de matrices M_f et M_g dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On voit que $\boxed{g \circ f \text{ est linéaire}}$ puisque

linéarité de f

$$g\circ f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = g\left(f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})\right) = g\left(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})\right)$$

$$= \lambda g(f(\vec{u})) + \mu g(f(\vec{v})) = \lambda\, g\circ f(\vec{u}) + \mu\, g\circ f(\vec{v}).$$

linéarité de g

Par conséquent $g\circ f$ est caractérisée par sa matrice $M_{g\circ f}$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Avec $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + \alpha \vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} \end{cases}$ et $\begin{cases} g(\vec{\imath}) = c\vec{\imath} + \gamma\vec{\jmath} \\ g(\vec{\jmath}) = d\vec{\imath} + \delta\vec{\jmath} \end{cases}$

c'est-à-dire $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on obtient

$$g\circ f(x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath}) = x_1\, g\circ f(\vec{\imath}) + x_2\, g\circ f(\vec{\jmath}) = x_1 g(a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}) + x_2 g(b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath})$$

$$= (ax_1 + bx_2)\, g(\vec{\imath}) + (\alpha x_1 + \beta x_2)\, g(\vec{\jmath}) = (ax_1 + bx_2)(c\vec{\imath} + \gamma\vec{\jmath}) + (\alpha x_1 + \beta x_2)(d\vec{\imath} + \delta\vec{\jmath})$$

$$= \left[c(ax_1 + bx_2) + d(\alpha x_1 + \beta x_2)\right]\vec{\imath} + \left[\gamma(ax_1 + bx_2) + \delta(\alpha x_1 + \beta x_2)\right]\vec{\jmath}$$

$$= \left[(ca + d\alpha)x_1 + (cb + d\beta)x_2\right]\vec{\imath} + \left[(\gamma a + \delta\alpha)x_1 + (\gamma b + \delta\beta)x_2\right]\vec{\jmath}$$

de sorte qu'avec $g\circ f(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}) = y_1\vec{i}+y_2\vec{j}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_{g\circ f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} ca+d\alpha & cb+d\beta \\ \gamma a+\delta\alpha & \gamma b+\delta\beta \end{pmatrix}$$

On définit le produit de matrices par la formule :

$$\boxed{M_g \circ M_f = M_{g\circ f}}$$

Soit

$$\boxed{\begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} ca+d\alpha & cb+d\beta \\ \gamma a+\delta\alpha & \gamma b+\delta\beta \end{pmatrix}}$$

C'est un produit : ligne par colonne

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ca+d\alpha & cb+d\beta \\ \gamma a+\delta\alpha & \boxed{\gamma b+\delta\beta} \end{pmatrix} \end{array}$$

qui fonctionne par blocs.

Avec $A = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on voit que

$$\boxed{M\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = M\left(\boxed{A}\,\middle|\,\boxed{B}\right) = \left(MA \,\middle|\, MB\right)}$$

Changement de base

Soit $(\vec{i}', \vec{j}')$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $\begin{cases} \vec{i}' = p\vec{i} + q\vec{j} \\ \vec{j}' = r\vec{i} + s\vec{j} \end{cases}$

Soit $\vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} = x'_1\vec{i}' + x'_2\vec{j}'$ On note

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$

$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{(\vec{i}', \vec{j}')}$

les coefficients de $\vec{v}$ et $f(\vec{v})$ dans la base

Par conséquent

$$\vec{v} = x'_1\vec{i}' + x'_2\vec{j}' = x'_1(p\vec{i} + q\vec{j}) + x'_2(r\vec{i} + s\vec{j})$$

$$= (px'_1 + rx'_2)\vec{i} + (qx'_1 + sx'_2)\vec{j}$$

$$= x_1\vec{i} + x_2\vec{j}.$$

Donc

$$X = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}}^{P}}_{\text{matrice de passage de } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ à } (\vec{i}', \vec{j}')} X'$$

$$\boxed{X = PX'} \quad \text{avec} \quad \boxed{P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \vec{i}' & \quad \vec{j}' \end{matrix} \end{array}}$$

Soit la matrice de l'application linéaire p telle que.

$$\boxed{p(\vec{i}) = \vec{i}' \quad \text{et} \quad p(\vec{j}) = \vec{j}'}$$

Puisque $(\vec{i}', \vec{j}')$ est une base, on peut exprimer de façon unique $\vec{i}$ et $\vec{j}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$.

Soit

$$\boxed{\vec{i} = p^{-1}(\vec{i}') \quad \text{et} \quad \vec{j} = p^{-1}(\vec{j}')}$$

On note p^{-1} l'application linéaire déterminée par cette relation.

et on voit par un raisonnement analogue à celui fait pour obtenir

$\boxed{X = PX'}$ que $\boxed{X' = P^{-1}X}$

En injectant $X = PX'$ dans $X' = P^{-1}X$ on obtient.

$$X' = P^{-1}X = P^{-1}PX' \quad , \forall X'$$

En injectant $X' = P^{-1}X$ dans $X = PX'$ on obtient

$$X = PX' = PP^{-1}X \quad , \forall X.$$

Donc $\quad X = PP^{-1}X = P^{-1}PX \quad , \forall X$

Cherchons les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui satisfont cette relation.

$X = MX \iff \begin{cases} ax + by = x \\ cx + dy = y \end{cases} \forall x, y$. En particulier avec $y = 0$

$\begin{cases} ax = x \\ cx = 0 \end{cases} \forall x \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ c = 0 \end{matrix}$ et avec $x = 0$: $\begin{cases} by = 0 \\ dy = y \end{cases}, \forall y \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \end{cases}$

soit $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En notant $\boxed{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, on a montré que.

$$\boxed{PP^{-1} = P^{-1}P = I}$$

On appelle I: la matrice identité car elle vérifie les relations.

$$\boxed{MI = IM = M \quad , \forall M \text{ matrice } 2\times 2}$$

preuve $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

par calcul direct. $\square$

On appelle P^{-1}: la matrice inverse de P.

Calculons $P^{-1}(\vec{i}')$ et $P^{-1}(\vec{j}')$.

$$\begin{cases} p\vec{i} + q\vec{j} = \vec{i}' \\ r\vec{i} + s\vec{j} = \vec{j}' \end{cases} \quad \begin{vmatrix} s \\ -q \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -r \\ p \end{vmatrix}$$

- $(sp - qr)\vec{i} = s\vec{i}' - q\vec{j}' \Rightarrow P^{-1}(\vec{i}') = \vec{i} = \dfrac{s}{ps-qr}\vec{i}' - \dfrac{q}{ps-qr}\vec{j}'$
- $(-rq + sp)\vec{j} = -r\vec{i}' + p\vec{j}' \Rightarrow P^{-1}(\vec{j}') = \vec{j} = -\dfrac{r}{ps-qr}\vec{i}' + \dfrac{p}{ps-qr}\vec{j}'$

Par conséquent, la matrice de P^{-1} dans la base $(\vec{i}', \vec{j}')$ est

$$\underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{s}{ps-qr} & -\dfrac{q}{ps-qr} \\ -\dfrac{r}{ps-qr} & \dfrac{p}{ps-qr} \end{pmatrix}$$

On sait déjà que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$. On peut le vérifier par calcul.

Changement de base et matrices d'applications linéaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire, deux bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i}', \vec{j}')$. Les coordonnées de $f(\vec{v})$ sont.

$f(\vec{v}) = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} = y_1'\vec{i}' + y_2'\vec{j}$; de sorte qu'en notant

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, on a : $\boxed{Y = PY'}$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j})$: $\boxed{Y = MX}$

On obtient donc $PY' = MPX'$. Et en multipliant à gauche par P^{-1}, $\underbrace{P^{-1}P}_{I} Y' = P^{-1}MPX' \iff Y' = P^{-1}MPX'$

car $P^{-1}P = I$ et $IY' = Y'$.

En notant M' la matrice de f dans la base $(\vec{i}', \vec{j}')$ on a prouvé que

$$\boxed{M' = P^{-1}MP}$$

matrice de passage $(\vec{i}, \vec{j}) \longrightarrow (\vec{i}', \vec{j}')$

matrice de f dans $(\vec{i}', \vec{j}')$

matrice inverse de P = matrice de passage $(\vec{i}', \vec{j}') \longrightarrow (\vec{i}, \vec{j})$

matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j})$