Droite dans le plan

La droite (D) de direction $\vec{d}=(\alpha,\beta)$ passant par le point $A=(x_0,y_0)$ est l'ensemble des points $M=(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{d}$. Soit : il existe $t\in\mathbb{R}$, tel que $\boxed{\overrightarrow{AM}=t\vec{d}}$

Or $\overrightarrow{AM}=(x-x_0,y-y_0)$. Donc $(x-x_0,y-y_0)=(t\alpha,t\beta)$.

L'équation paramétrique de (D) est

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0+t\alpha \\ y = y_0+t\beta \end{cases},\ t\in\mathbb{R}} \quad (*)$$

Puisque $\vec{d}\neq(0,0)$, soit α, soit β est non nul.

Supposons que ce soit $\alpha\neq0$. Alors

$$x=x_0+t\alpha \iff t=\frac{x-x_0}{\alpha}$$ et par substitution :

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{\alpha}\beta \iff \boxed{\beta x-\alpha y=\beta x_0-\alpha y_0} \quad (**)$$

On remarque que si $\alpha=0$, cela se réduit à $x=x_0$ ce qui est cohérent avec $(*)$.

Cette équation est de la forme.

$$\boxed{ax+by+c=0} \quad (***)$$

C'est l'équation cartésienne de (D).

(*) signifie que (D) est l'ensemble des points de coord. (x,y)

- tels que $x = x_0 + t\alpha$ et $y = y_0 + t\beta$ pour un $t \in \mathbb{R}$.

(***) signifie que (D) est l'ensemble des points de coord. (x,y)

- tels que $ax + by + c = 0$.

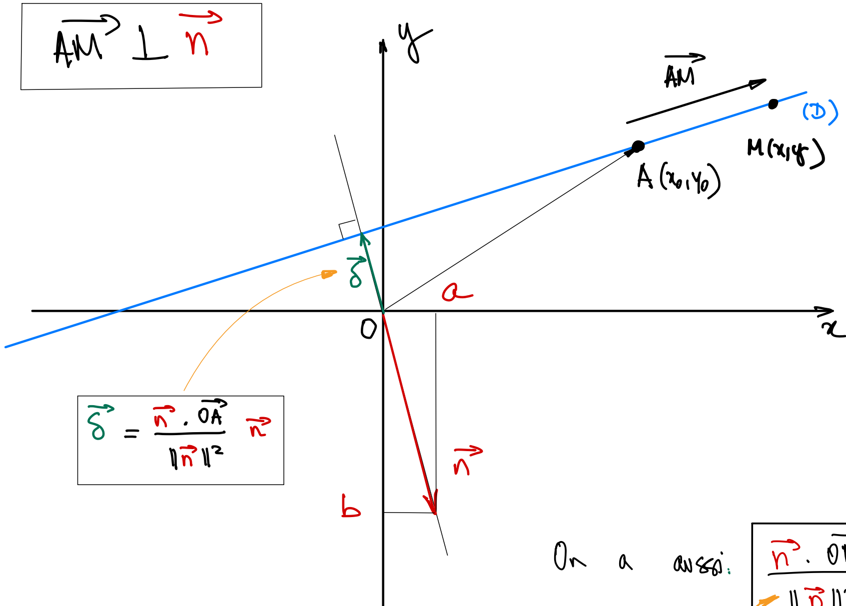
Interprétation géométrique de l'équation cartésienne (***)

Posons $\vec{n} = (a,b)$, prenons $A = (x_0, y_0) \in (D)$ et notons $M = (x,y)$.

Alors $(x,y) \in (D) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{OM} + c = 0$. En particulier,
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} + c = 0$. Donc $\boxed{c = -\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}}$ et $\boxed{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}}$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$ ont le même projeté orthogonal $\vec{\delta}$ sur la droite $(0,\vec{n})$:
$$\boxed{P_{\vec{n}}(\overrightarrow{OM}) = P_{\vec{n}}(\overrightarrow{OA})}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}}$$



$$\boxed{\vec{\delta} = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}}$$

On a aussi : $\boxed{\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \vec{\delta}}$

$P_{\vec{n}}(\overrightarrow{OM})$ $\quad$ $P_{\vec{n}}(\overrightarrow{OA})$

Plan dans l'espace

Le plan $(P) \subset \mathbb{R}^3$ de direction $\begin{cases} \vec{d_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\ \vec{d_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \end{cases}$ où $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas colinéaires, passant par le point $A = (x_0, y_0, z_0)$ est l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels que

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \in \operatorname{vect}(\vec{d_1}, \vec{d_2})}$$

Soit : il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $\overrightarrow{AM} = t_1 \vec{d_1} + t_2 \vec{d_2}$

Or $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Donc

$$\boxed{(*) \quad \begin{cases} x = x_0 + t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2 \\ y = y_0 + t_1 \beta_1 + t_2 \beta_2 \\ z = z_0 + t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2 \end{cases} , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.}$$

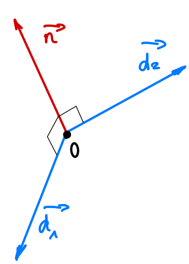
<u>L'équation cartésienne</u> s'obtient à l'aide d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{d_1} = 0$$
$$\vec{n} \cdot \vec{d_2} = 0$$

Par exemple $\vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2}$.

Soit $\vec{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ses coordonnées

$$\overrightarrow{AM} \in \operatorname{vect}(\vec{d_1}, \vec{d_2}) \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



Or $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$, donc $\vec{n}\cdot\vec{AM} = 0 \iff \vec{n}\cdot\vec{OM} = \vec{n}\cdot\vec{OA}$

Soit $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

avec $\boxed{d = -\vec{n}\cdot\vec{OA} = ax_0 + by_0 + cz_0}$.

Droite dans l'espace

La droite $(D) \subset \mathbb{R}^3$ de direction $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ passant par le point $A = (x_0, y_0, z_0)$ est l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{AM} = t\vec{d}$. Donc

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Une équation cartésienne s'obtient en "éliminant" t.

Par exemple, si $\alpha \neq 0$: $t = \dfrac{x - x_0}{\alpha}$ et les deux autres équations donnent :

$$\begin{cases} y = y_0 + \beta\,\dfrac{x - x_0}{\alpha} \\ z = z_0 + \gamma\,\dfrac{x - x_0}{\alpha} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \beta x - \alpha y = \beta x_0 - \alpha y_0 \\ \gamma x - \alpha z = \gamma x_0 - \alpha z_0 \end{cases}} \quad (\text{si } \alpha \neq 0)$$

Il s'agit de deux équations cartésiennes de plans.

En effet, dans l'espace une droite est l'intersection de deux plans.

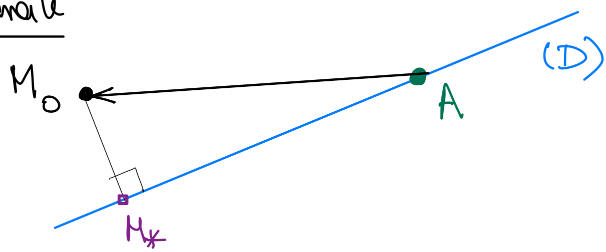
Cette remarque nous donne la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite dans l'espace :

$$\boxed{\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}}$$

avec $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)$ non colinéaires.

Projection orthogonale (dans l'espace)

Sur une droite



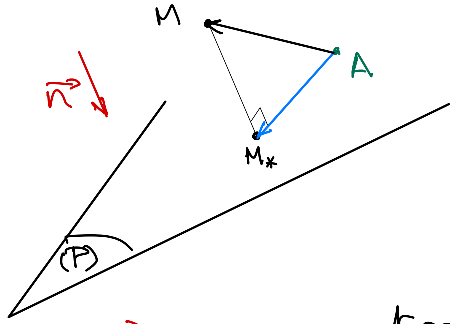
La droite (D) est de direction $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et passe par A . On cherche les coordonnées de $P = (x, y, z)$, projection orthogonale de $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sur (D).

$$\begin{cases} \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM_*} = t\,\vec{d} \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{AM_*} \cdot \vec{d} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{d} = t \|\vec{d}\|^2 \Rightarrow t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}$$

Finalement $$\boxed{\overrightarrow{AM_*} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}}$$ comme dans le plan.

Bien sûr, puisqu'on travaille dans le plan contenant la droite (D) et le point M_0. (mais on le constate après coup).

Sur un plan



(P) plan orthogonal à $\vec{n}$ passant par A.

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_*} = t\vec{n} \\ \overrightarrow{AM_*}\cdot\vec{n} = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MM_*} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_*} = t\vec{n}.$$

$$\overrightarrow{MM_*}\cdot\vec{n} = t\,\|\vec{n}\|^2 = \overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}$$

donc $t = \dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$ et $\boxed{\overrightarrow{MM_*} = \dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}}$

$P_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA})$