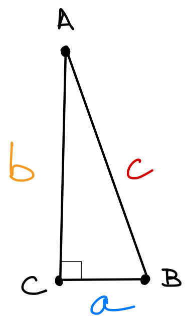
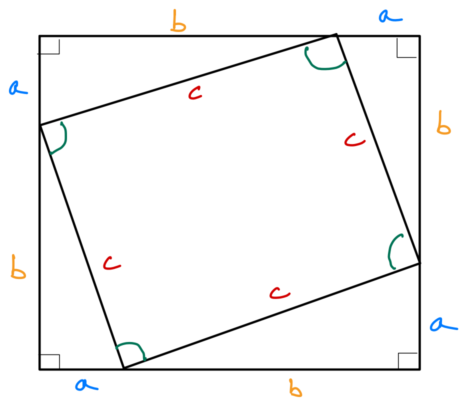
Mesurer des longueurs

Le théorème de Pythagore



$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$



"preuve !" (en fait il s'agira d'une démonstration).

On forme un carré de côté $a+b$. On fait apparaître les 4 triangles rectangles de côtés a, b, c, semblables à ABC.

Montrons que le quadrilatère de côté c est un carré. Puisque tous ses côtés sont égaux, c'est un losange. Par symétrie, tous angles α aux coins sont égaux. Or

(φ) dans le plan, la somme des angles internes d'un quadrilatère dont les côtés ne se coupent pas vaut 2π.

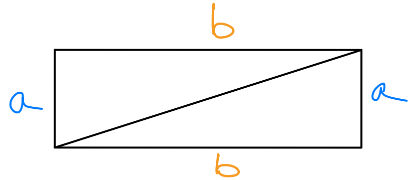
Par conséquent, $4\alpha = 2\pi$. Soit $\alpha = \pi/2$.

Le quadrilatère de côté c est donc un rectangle. Puisque ses côtés sont de longueurs égales, c'est un carré.

L'aire $\mathcal{A}$ du grand carré vaut $\mathcal{A} = (a+b)^2$.

C'est aussi la somme des aires des 4 triangles rectangles et du carré de côté c.

En mettant deux triangles rectangles semblables tête-bêche on obtient :



L'aire du rectangle est $a.b$, de sorte que la somme des aires des 4 triangles rectangles vaut $2ab$.

Par conséquent $\mathcal{A} = 2ab + c^2$. Finalement

$$\mathcal{A} = (a+b)^2 = 2ab + c^2$$

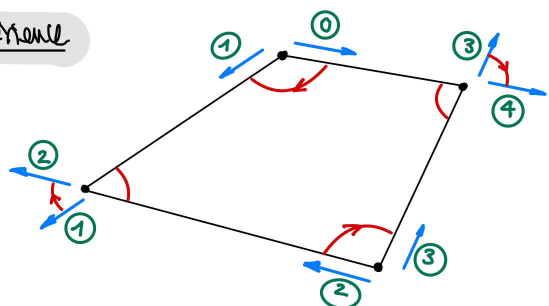
. Ce qui en développant :

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2$$

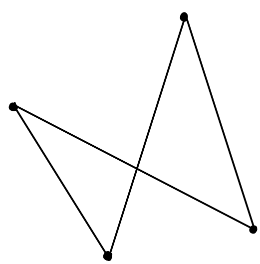
nous donne $a^2 + b^2 = c^2$ $\square$

> Cette démonstration n'est pas entièrement mathématique. On a fait de la physique en invoquant (P).

Expérience



bon quadrilatère

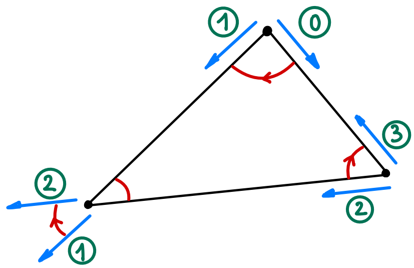


mauvais quadrilatère

On décide de tourner dans le sens des aiguilles d'une montre et on constate qu'on fait un tour exactement.

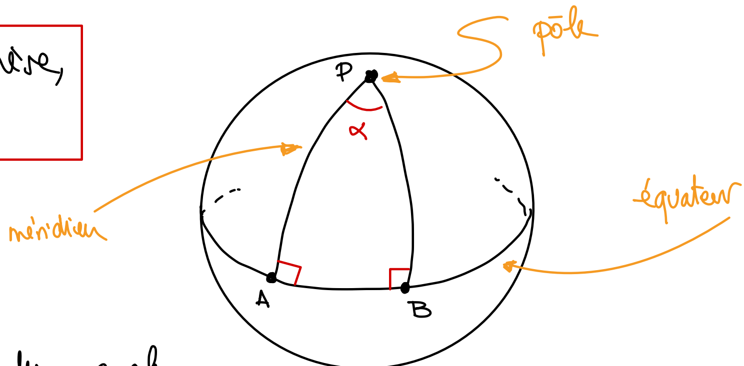
La somme des angles fait donc : 1 tour $\longrightarrow$ 2π en maths.

Quel est "l'objet" physique ? Pour voir que cet objet est le plan, faisons une "expérience" sur la sphère. Plutôt qu'un quadrilatère, prenons un triangle pour simplifier la tâche.



La somme des angles d'un triangle dans le plan vaut un demi-tour $\longrightarrow \pi$.

$\boxed{\text{Sur une sphère, c'est faux}}$



La somme des angles d'un triangle est supérieure à π. Ici on obtient $\pi+\alpha$.

Un méridien est le plus court chemin pour aller d'un pôle à un point de l'équateur et l'équateur est le plus court chemin pour rejoindre deux points de l'équateur.

PAB est donc un triangle sur la sphère.

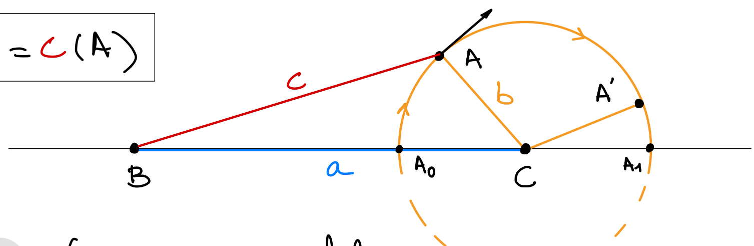
Le théorème de Pythagore représente une réalité physique dans un espace plat.

Il énonce une structure fondamentale des espaces plats

Réciproque du théorème de Pythagore

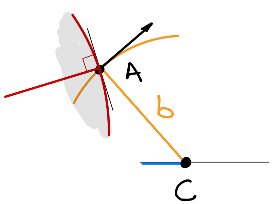
Dans le plan, si un triangle ABC est tel que $a^2+b^2=c^2$, alors c'est un triangle rectangle en C.

$\boxed{c = c(A)}$



démonstration (semi-expérimentale)

Les longueurs $a = BC$ et $b = AC$ sont fixées, ainsi que les points B et C. En revanche la longueur $c = AB$ varie en fonction de la position de A sur le cercle de centre C et de rayon b. On constate que $c(A)$ est une fonction strictement croissante lorsque A varie de A_0 à A_1. Cela est dû à



puisque la zone grisée est celle des points M proches de A et tels que $BM \leq BA = c$, et on voit que A avance dans la zone complémentaire.

Puisque $A \mapsto c(A)$ croît strictement et continuement entre $c(A_0) = |a-b|$ et $c(A_1) = a+b$, la fonction

$A \longmapsto c(A)^2 - (a^2+b^2)$ croît strictement et continuement entre $|a-b|^2 - (a+b)^2 < 0$ et $(a+b)^2 - (a^2+b^2) > 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule en un unique point. Il existe donc un unique point $\tilde{A}$ tel que $0 = c(\tilde{A})^2 - (a^2+b^2)$, soit $a^2+b^2 = c(\tilde{A})^2$.

Mais, on sait déjà par le théorème de Pythagore que si A_*BC est rectangle en C, alors $a^2+b^2 = c(A_*)^2$. Donc $\tilde{A} = A_*$, ce qui achève la démonstration $\square$

Résultat (mi-maths, mi-expérience physique). Dans le plan, ABC est rectangle en C si et seulement si $a^2+b^2 = c^2$

C'est un résumé du théorème de Pythagore et de sa réciproque.

Distance entre deux points dans un espace plat.

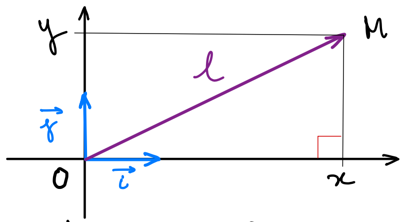
Dans $\mathbb{R}^n$ points : $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$

vecteur : $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$

$\text{dist}(A,B) := \text{longueur}(\overrightarrow{AB})$

Regardons la longueur d'un vecteur.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



$M = (x,y)$

$\ell = \text{longueur}(\vec{OM}) =: \|\vec{OM}\|$

Pythagore nous dit que $\ell^2 = x^2+y^2$. Donc $\ell = \sqrt{x^2+y^2}$

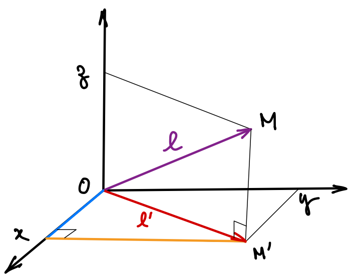
On note $\text{longueur}(\vec{OM}) = \|\vec{OM}\|$ qu'on appelle <u>norme</u> de $\vec{OM}$:

$$\boxed{\text{avec } \vec{OM} = (x,y), \quad \|\vec{OM}\| \overset{def}{=} \sqrt{x^2+y^2}}$$

Résultat expérimental : dans le plan $\boxed{\|\vec{OM}\| = \text{dist}(O,M)}$

Dans $\mathbb{R}^3$. Repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$M = (x,y,z) \longleftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



- Pythagore dans le triangle rectangle OM'M nous donne :
$$\ell^2 = \ell'^2 + z^2$$
- Pythagore dans le triangle rectangle horizontal nous donne
$$\ell'^2 = x^2 + y^2$$

Finalement $\ell^2 = \underbrace{x^2+y^2}_{\|\vec{OM'}\|^2} + z^2$. En notant $\boxed{\|\vec{OM}\| := \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

on a à nouveau le résultat expérimental : $\boxed{\text{dist}(O,M) = \|\vec{OM}\|}$

Dans $\mathbb{R}^n$, en appliquant successivement le théorème de Pythagore, l'unique notion de distance cohérente avec celle restreinte à tous les sous-espaces vectoriels de dimension 2 est :

$$\mathrm{dist}(O,M) = \|\overrightarrow{OM}\| \qquad \text{avec}$$

norme d'un vecteur

$$\|\vec{u}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{où } \vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

On introduit aussi le

produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \vec{v} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

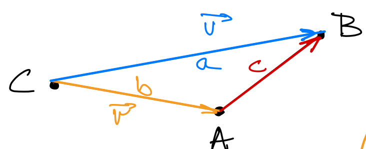
De sorte que $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$.

Résultat expérimental dans un espace plat ($\mathbb{R}^n$)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

démonstration On prend $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Ils sont dans le plan qu'ils engendrent (évidemment)



Pythagore et sa réciproque

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff ABC \text{ rectangle en } C \iff a^2 + b^2 = c^2$$

Or $\vec{v} = \vec{u} + \vec{AB} \iff \vec{AB} = \vec{v} - \vec{u}$, donc

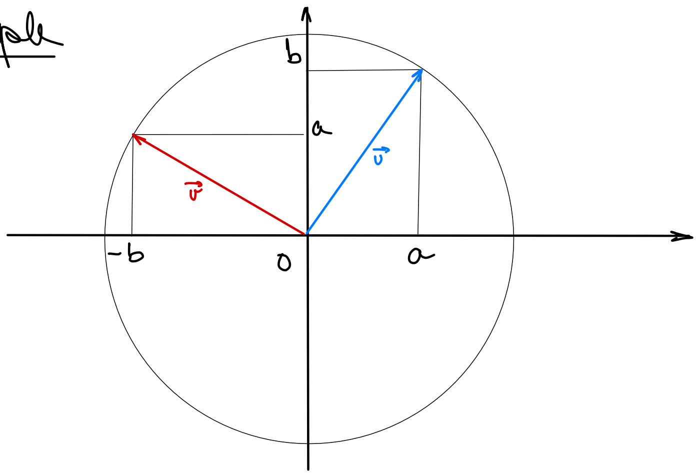
$$c^2 = \|\vec{v}-\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = a^2+b^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Par conséquent $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$ □

règle de calcul provenant de la définition du produit scalaire et de la norme.

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}, \quad (\vec{u}_1+\vec{u}_2)\cdot\vec{v} = \vec{u}_1\cdot\vec{v}+\vec{u}_2\cdot\vec{v}, \quad (\lambda\vec{u})\cdot(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\,\vec{u}\cdot\vec{v} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})}$$

__Exemple__



$$\begin{cases} \vec{u}=(a,b) \\ \vec{v}=(-b,a) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \\ \|\vec{u}\|=\|\vec{v}\| \end{cases}$$

Projection orthogonale sur une droite (dans le plan) $(\vec{d}\neq\vec{0})$

On projette le vecteur $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ sur la droite $D := \mathbb{R}\vec{d} \subset \mathbb{R}^n$.

On note $D^\perp = \{\vec{v}\in\mathbb{R}^n ; \vec{d}\cdot\vec{x}=0\}$.

__Théorème__ $D^\perp$ est un espace de dimension $n-1$

(admis)

preuve complète basée sur le théorème de la base incomplète et le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

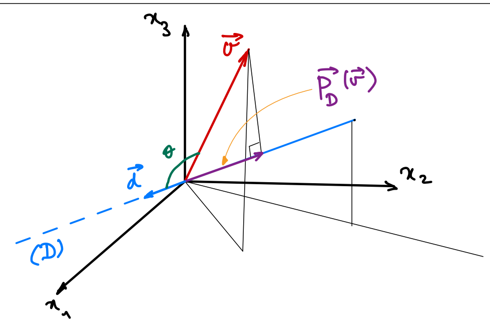
exemple : Dans $\mathbb{R}^n$, $\vec{d} = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$

- $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in D^\perp \Rightarrow \mathrm{vect}(\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \subset D^\perp \Rightarrow \dim(D^\perp) \geq n-1$
- $\vec{e}_1 \notin D^\perp \Rightarrow \dim(D^\perp) \leq n-1$.

On complète $\vec{d}$ par une base $(\vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ de $D^\perp$.

Tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de façon unique

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{v} = a\vec{d} + \vec{b} \text{ avec } \vec{b} \in D^\perp,\ a \in \mathbb{R}. \\ P_D(\vec{v}) := a\vec{d} \text{ est la projection orthogonale de } v \text{ sur } \mathbb{R}\vec{d}.\end{array}}$$



$$(v - a\vec{d}) \perp \vec{d} \Leftrightarrow \vec{d}\cdot(\vec{v} - a\vec{d}) = 0 \Leftrightarrow \vec{d}\cdot\vec{v} - a\|\vec{d}\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}$$

Donc :
$$\boxed{P_D(\vec{v}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}\vec{d}}$$

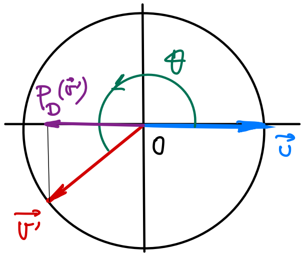
Puisque $\vec{v} = P_D(\vec{v}) + \vec{b}$ avec $P_D(\vec{v}) \perp \vec{b}$, on a :

$\|\vec{v}\|^2 = \|P_D(\vec{v})\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \geq \|P_D(\vec{v})\|^2$ car $\|\vec{b}\|^2 \geq 0$. Donc

$\|\vec{v}\| \geq \|P_D(\vec{v})\| = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{d}\|^2}\|\vec{d}\| = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{d}\|}$. Soit $\boxed{|\vec{d}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{d}\|\,\|\vec{v}\|}$

Autrement dit ; avec $\vec{u} := \dfrac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$, $\vec{v}' = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, on a $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}'\| = 1$

et



<u>remarque</u> : $-1 \leq \vec{u} \cdot \vec{v}' \leq 1$

$$P_D(\vec{v}') = (\vec{u} \cdot \vec{v}')\ \vec{u}$$

et on voit graphiquement que

$$P_D(\vec{v}') = \cos(\theta)\ \vec{u}$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v}' = \cos(\theta)$

Soit $$\boxed{\vec{d} \cdot \vec{v} = \cos(\theta)\ \|\vec{d}\|\ \|\vec{v}\|}$$