Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$, $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$, $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$.

Exercice 2. On note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $R_\theta R_{\theta'}$, ainsi que R_θ^n pour tout $n \geq 1$ entier.

(b) Calculer S_0^2 et montrer que $S_\theta = R_\theta S_0 = S_0 R_{-\theta}$.

(c) Calculer $S_\theta S_{\theta'}$, $S_{\theta'} S_\theta$, $S_\theta R_{\theta'}$ et $R_{\theta'} S_\theta$.

(d) Calculer S_θ^{-1}, S_θ^n et $S_\theta^{-n} := (S_\theta^{-1})^n$ pour tout $n \geq 1$ entier.

(e) Montrer que l'action géométrique de R_θ est celle d'une rotation d'angle θ et que celle de S_θ est une symétrie par rapport à une droite d'angle $\theta/2$ (en coordonnées polaires).

(f) Retrouver les résultats des questions (a)–(d) à l'aide de calculs élémentaires sur les nombres complexes.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ & & \iddots & & \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'application linéaire dans $\mathbb{R}^n$ associée, calculer A^p pour tout p entier.

Exercice 5. Soit $\mathsf{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathsf{B}' = (\vec{i}', \vec{j}') = (\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$.
Déterminer la matrice de p dans les couples de bases (B, B), $(\mathsf{B}', \mathsf{B})$, et $(\mathsf{B}', \mathsf{B}')$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $\vec{i}' = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{j}' = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{k}' = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ forment une base et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 7. Soient $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(\vec{\imath})=\vec{k}$, $f(\vec{\jmath})=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ et $f(\vec{k})=\vec{k}$.

(a) Écrire la matrice A de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Déterminer son noyau $\ker f := \{\vec{v}\in\mathbb{R}^3; f(\vec{v})=\vec{0}\}$.

(b) On pose $\vec{\imath}'=\vec{\imath}-\vec{k}, \vec{\jmath}'=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{k}'=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$.
Calculer $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ en fonction de $\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'$. Les vecteurs $\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'$ forment-ils une base ?

(c) Calculer $f(\vec{\imath}'),f(\vec{\jmath}'),f(\vec{k}')$ en fonction de $\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'$. Écrire la matrice B de f dans la base $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ et trouver la nature de l'application f.

(d) On pose $P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible, calculer P^{-1} et constater que $B=P^{-1}AP$.

Exercice 8. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix}2&2/3\\-5/2&-2/3\end{pmatrix}$. Soient $\vec{\imath}=(-2,3)$ et $\vec{\jmath}=(-2,5)$.

(a) Montrer que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base et déterminer la matrice B de f dans cette base.

(b) Calculer A^n pour $n\geq$ entier.

(c) Déterminer l'ensemble des suites $(x_n,y_n)_{n\geq0}$ qui vérifient pour tout n, $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n/3, \\ y_{n+1} = -5x_n/2 - 2y_n/3. \end{cases}$