SFSPI - 2021 - Correction du devoir 1

Exercice 1. On appelle (D) la droite passant par les deux points $A = (3,1)$ et $B = (-1,2)$ dans le plan.

(a) Donner une équation paramétrique de (D).

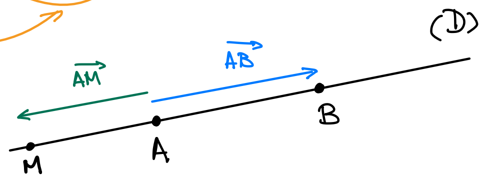
(b) Donner une équation cartésienne de (D).

(a) Un vecteur directeur de (D) est $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (-1-3, 2-1) = (-4,1)$

Un point $M = (x,y)$ appartient à (D) si et seulement si (ssi) :

$$\boxed{\exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \quad (*)}$$

il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que



Or $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x-3, y-1)$. Donc $(*)$ s'écrit :

$$\exists t \in \mathbb{R},\ (x-3, y-1) = t(-4,1) \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

L'équation paramétrique de (D) est

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R}.}$$

(b) première solution : On élimine t dans l'équation paramétrique.

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \longrightarrow t = \frac{1}{4}(3-x) \\ y = 1 + t \longrightarrow y = 1 + \frac{1}{4}(3-x) \iff \boxed{\frac{x}{4} + y = \frac{7}{4}} \end{cases}$$

seconde solution : (sans passer par l'équation paramétrique)

Le vecteur $\vec{n} = (1,4)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ car $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times(-4) + 4\times 1 = 0$

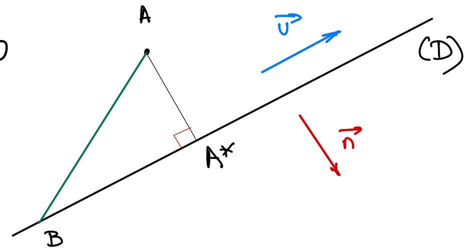
Or $M = (x,y) \in (D)$ ssi : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \iff (1,4)\cdot(x-3, y-1) = 0$

$$\iff \boxed{x + 4y - 7 = 0}$$

Exercice 2.

(a) Déterminer le projeté orthogonal du point $A = (2,3)$ sur la droite (D) d'équation $4x - 3y = 6$.

(b) Quelle est la distance du point A à la droite (D) ?



(a) Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u} = (3,4)$ car si $ax+by+c=0$ est l'équation de (D), $\vec{n} = (a,b)$ est orthogonal à (D), donc $\vec{u} = (-b,a)$ est directeur car $\vec{n}\cdot\vec{u} = -ab+ba = 0$, soit $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

On prend un point B quelconque de (D), par exemple $B = (0,-2)$.

On a vu en cours que A^* est donné par :

$$\boxed{\overrightarrow{BA^*} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}}$$

Avec (x,y) les coordonnées de A^*, cela donne.

$$(x-x_B, y-y_B) = \frac{(x_A-x_B, y_A-y_B)\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \quad \text{soit}$$

$$(x, y+2) = \frac{(2,5)\cdot(3,4)}{\|(3,4)\|^2}(3,4) = \frac{2\times 3 + 5\times 4}{3^2+4^2}(3,4) = \frac{26}{25}(3,4)$$

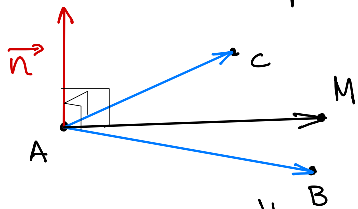
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\times 26}{25} = \dfrac{78}{25} \\[2mm] y = -2 + \dfrac{4\times 26}{25} = \dfrac{54}{25} \end{cases} \quad . \text{ Soit } \boxed{A^* = \left(\frac{78}{25}, \frac{54}{25}\right)}$$

(b) On a $d = \|\overrightarrow{AA^*}\|$. Or $\overrightarrow{AA^*} = \left(\frac{78}{25} - 2, \frac{54}{25} - 3\right) = \left(\frac{28}{25}, -\frac{21}{25}\right)$

Donc $d = \sqrt{\left(\frac{28}{25}\right)^2 + \left(-\frac{21}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{28^2+21^2}$.

Exercice 3. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, donner l'équation cartésienne du plan passant par les points $A = (1,0,1)$, $B = (0,1,2)$ et $C = (-1,3,0)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (P) passant par A, B et C.



Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc orthogonal à tout le plan (P). Par conséquent, un point $M \in (P)$ ssi $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad (*)}$

Nous avons $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (0-1, 1-0, 2-1) = (-1, 1, 1)$

De même $\overrightarrow{AC} = (-1-1, 3-0, 0-1) = (-2, 3, -1)$. De sorte que

$$\vec{n} = (-1,1,1) \wedge (-2,3,-1) = (-4,-3,-1)$$

Avec $M = (x,y,z)$, $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x-1, y, z-1)$

Donc $(*)$ s'écrit.

$$(-4,-3,-1) \cdot (x-1, y, z-1) = 0 \iff -4(x-1) - 3y - z + 1 = 0$$

et en multipliant par -1 pour que ce soit plus beau :

$$\boxed{4x + 3y + z - 5 = 0}$$

Exercice 4.

(a) À l'aide d'un système d'équations, trouver l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Même question avec la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) $$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \quad (*)$$

M est inversible ssi pour tout (u,v), $(*)$ admet une unique solution (x,y).

Dans ce cas : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

On résoud le système $(*)$:

$$\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2x = u+v \\ 2y = u-v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \\ y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{Donc } \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}.$$

(b) $$N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + 3z = u & \longrightarrow x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{5}\left(w - \frac{v}{4}\right) - 3\frac{v}{4}\right) \\ 4z = v & \longrightarrow z = v/4 \\ 5y + z = w & \longrightarrow y = \frac{1}{5}\left(w - \frac{v}{4}\right) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(u - \left(\frac{1}{5\times 4} + \frac{3}{4}\right)v + \frac{w}{5}\right) = \frac{u}{2} - \frac{2}{5}v + \frac{w}{10} \\ y = \frac{-v}{20} + \frac{w}{5} \\ z = \frac{v}{4} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/5 & 1/10 \\ 0 & -1/20 & 1/5 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/5 & 1/10 \\ 0 & -1/20 & 1/5 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Montrer à l'aide d'un système d'équations que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Montrons que le système $(*)$: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ n'admet pas de solution pour certaines valeurs de (u, v, w)

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - 2z = u \\ -x + 2y + 2z = v \\ 3y = w \end{cases} \longrightarrow (**) \begin{cases} x - 2z = u - w/3 \\ -x + 2z = v - 2\frac{w}{3} \end{cases}$$

$$3y = w \longrightarrow y = w/3$$

En faisant la somme des équations dans $(**)$: $0 = u + v - w$

Par conséquent, si $u + v - w \neq 0$, le système $(*)$ n'admet pas de solution. Donc la matrice A n'est pas inversible.