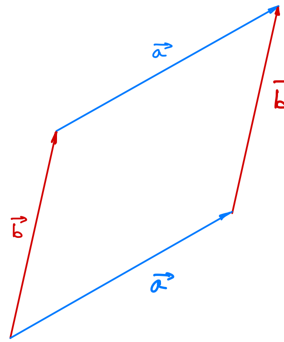
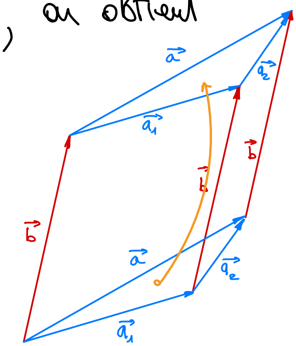
Mesurer une aire



On note $\mathcal{A}(\vec a, \vec b)$ l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec a$ et $\vec b$.

On constate visuellement qu'avec $\vec a = \vec{a_1} + \vec{a_2}$, on obtient



$$\mathcal{A}(\vec{a_1}+\vec{a_2}, \vec b) = \mathcal{A}(\vec{a_1}, \vec b) + \mathcal{A}(\vec{a_2}, \vec b).$$

Pour les mêmes raisons graphiques on a :

$\mathcal{A}(\vec b, \vec{a_1}+\vec{a_2}) = \mathcal{A}(\vec b, \vec{a_1}) + \mathcal{A}(\vec b, \vec{a_2})$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{(i)}\ \mathcal{A}(\vec a + \vec{a}', \vec b + \vec{b}') = \mathcal{A}(\vec a, \vec b) + \mathcal{A}(\vec a, \vec{b}') + \mathcal{A}(\vec{a}', \vec b) + \mathcal{A}(\vec{a}', \vec{b}')}$$

D'autre part pour des raisons d'homogénéité, il est nécessaire que

$$\boxed{\text{(ii)}\ \mathcal{A}(\lambda \vec a, \mu \vec b) = \lambda\mu\, \mathcal{A}(\vec a, \vec b), \quad \text{pour tous } \lambda, \mu \geq 0.}$$

Et de façon évidente, on voit que : $\boxed{\text{(iii)}\ \mathcal{A}(\vec a, \vec a) = 0}$.

On appelle **aire** toute fonction $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ satisfaisant les trois propriétés (i), (ii) et (iii).

À l'aide de (i) et (iii), on obtient :

$$0 = t(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}) = \underbrace{t(\vec{a},\vec{a})}_{=0} + t(\vec{a},\vec{b}) + t(\vec{b},\vec{a}) + \underbrace{t(\vec{b},\vec{b})}_{=0} = t(\vec{a},\vec{b}) + t(\vec{b},\vec{a})$$

D'où il vient que : $\boxed{t(\vec{b},\vec{a}) = -t(\vec{a},\vec{b})}$.

La notion naturelle d'aire en mathématique est <u>signée</u>.

Avec (ii), on voit que $t(\vec{0},\vec{b}) = 0$, $t(\vec{a},\vec{0}) = 0$. De sorte que $0 = t(\vec{a}-\vec{a}, \vec{b}) = t(\vec{a},\vec{b}) + t(-\vec{a},\vec{b})$.

Soit $t(-\vec{a},\vec{b}) = -t(\vec{a},\vec{b})$. De même $t(\vec{a},-\vec{b}) = -t(\vec{a},\vec{b})$.

Par conséquent, avec $\lambda \leq 0$, on a : $\lambda = -|\lambda|$ et

$$t(\lambda\vec{a},\vec{b}) = t(-|\lambda|\vec{a},\vec{b}) \overset{(ii)}{=} |\lambda|\, t(-\vec{a},\vec{b}) = -|\lambda|\, t(\vec{a},\vec{b}) = \lambda\, t(\vec{a},\vec{b})$$

De même $t(\vec{a},\mu\vec{b}) = -t(\mu\vec{b},\vec{a}) = -\mu\, t(\vec{b},\vec{a}) = \mu\, t(\vec{a},\vec{b})$.

De sorte que (ii) s'étend à : $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{(ii)'\ t(\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}) = \lambda\mu\, t(\vec{a},\vec{b}),\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}.}$$

Donnons-nous une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$ (pas nécessairement orthonormée).

Avec $\vec{a} = a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$ et $\vec{b} = b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$, calculons

$$t(\vec{a},\vec{b}) = t(a\vec{\imath}+\alpha\vec{\jmath}, b\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}) = ab\,\underbrace{t(\vec{\imath},\vec{\imath})}_{=0} + a\beta\, t(\vec{\imath},\vec{\jmath}) + \alpha b\,\underbrace{t(\vec{\jmath},\vec{\imath})}_{=-t(\vec{\imath},\vec{\jmath})} + b\beta\,\underbrace{t(\vec{\jmath},\vec{\jmath})}_{=0}$$

$$= [a\beta - \alpha b]\, t(\vec{\imath},\vec{\jmath}).$$

On note $\boxed{A = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}}$ les colonnes de coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et on définit

$$\det(A,B) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det(A,B) := a\beta - \alpha b}$$ le déterminant de (A,B).

On note $\mathcal{A}_{\vec{\imath}\vec{\jmath}}(\vec{a},\vec{b}) := \det(A,B)$

la fonction d'aire correspondant à $\mathcal{A}_{\vec{\imath}\vec{\jmath}}(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = 1$.

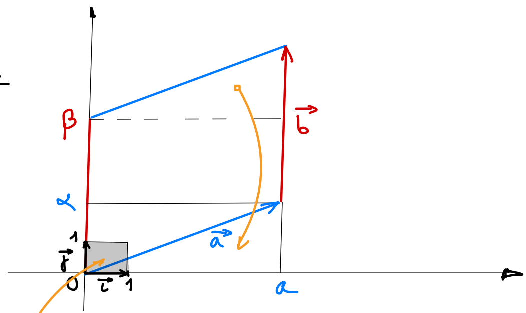
On a démontré le

Théorème Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathbb{R}^2$.

Toute aire $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est proportionnelle à $\mathcal{A}_{\vec{\imath}\vec{\jmath}}$:

$$\mathcal{A}(\vec{a},\vec{b}) = \mathcal{A}(\vec{\imath},\vec{\jmath}) \det(A,B) = \mathcal{A}(\vec{\imath},\vec{\jmath})\, \mathcal{A}_{\vec{\imath}\vec{\jmath}}(\vec{a},\vec{b}).$$

Exemples



$\mathcal{A}(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = 1$
(normalisation)

$A = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$

$\det(A,B) = a\beta - \alpha \cdot 0 = a\beta$

$\det(B,A) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = -a\beta$

donc $\mathcal{A}(\vec{a},\vec{b}) = \det(A,B)$

On voit que l'aire du parallélogramme construit sur $(\vec{a},\vec{b})$

est $a\beta$: l'aire du rectangle construit sur $(a\vec{\imath},\vec{b})$

On a aussi $\mathcal{A}(\vec{b},\vec{a}) = -\mathcal{A}(\vec{a},\vec{b}) = -a\beta$

Le signe est donné par l'orientation de $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$

On va de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ en tournant dans le même sens que de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$

Si on avait choisi $\mathcal{A}(\vec{\jmath},\vec{\imath}) = 1$, alors $\mathcal{A}(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = -1$ et

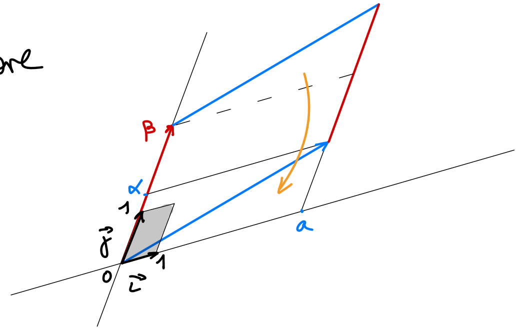
$\mathcal{A}_{\vec{\jmath}\vec{\imath}}(\vec{a},\vec{b}) = -\det(A,B) = -a\beta$, alors que $\mathcal{A}_{\vec{\jmath}\vec{\imath}}(\vec{b},\vec{a}) = a\beta$.

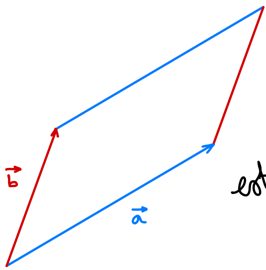
Un autre exemple

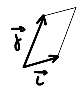
On a encore

$\vec{a} = a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$, $\vec{b} = \beta\vec{\jmath}$. Mais

le repère $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est "oblique".



L'aire de 

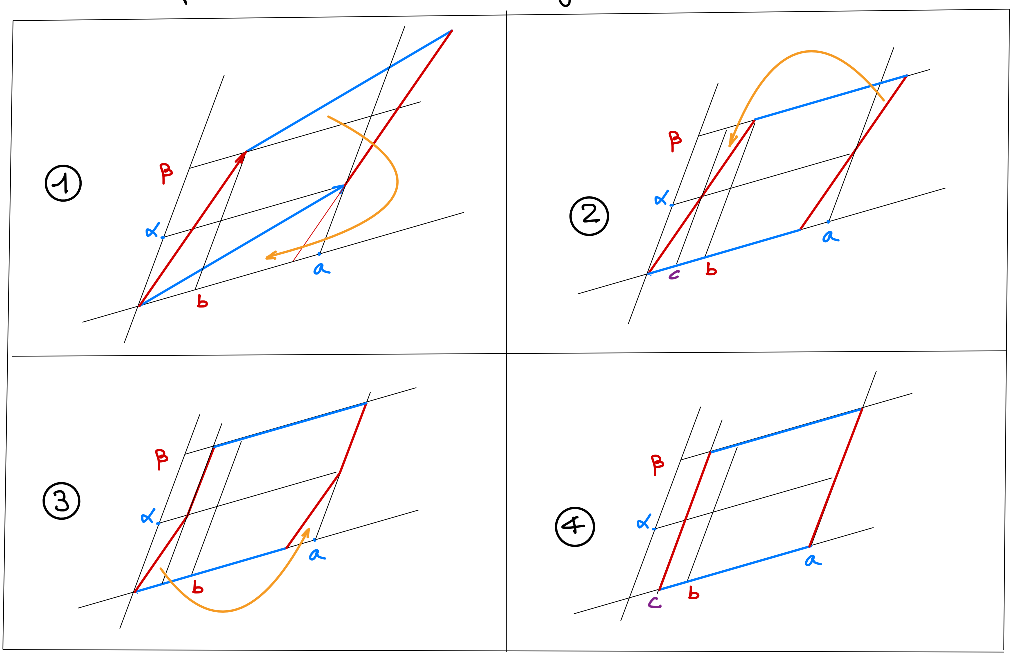
est $\det(A,B) = a\beta$ fois celle de 

Avec plus de généralité.

Cette fois-ci

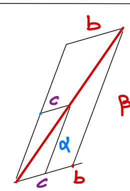
$$\vec{a} = a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{b} = b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$$

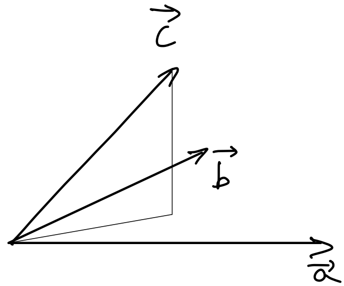
avec α éventuellement $\neq 0$.



Par le théorème de Thalès : $\dfrac{b}{\beta} = \dfrac{c}{\alpha}$, donc $c\beta = \alpha b$

et l'aire vaut $a\beta - c\beta = a\beta - \alpha b = \det(A,B)$.





$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$V(a+a', b+b', c+c')$

$= V(a, b, c) + V(a, b, c') + \dots$

$V(a, a, b) = V(a, b, a) = V(b, a, a) = 0$

---

t est bilinéaire.

$t(\vec{a}, \vec{b})$

$\forall \vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}' \in \mathbb{R}^2$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $t(\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}) = t(\vec{a}, \vec{b}) + t(\vec{a}', \vec{b})$
  $t(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda t(\vec{a}, \vec{b})$
- $t(\vec{a}, \vec{b} + \vec{b}') = t(\vec{a}, \vec{b}) + t(\vec{a}, \vec{b}')$
  $t(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda t(\vec{a}, \vec{b})$