SF- CM 6- gp2

Matrice d'une application linéaire.

Application linéaire : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}), \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

On se donne une base de $\mathbb{R}^2$: $(\vec{i},\vec{j})$. L'application f est déterminée par la donnée de

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = a\vec{i} + \alpha\vec{j} \\ f(\vec{j}) = b\vec{i} + \beta\vec{j} \end{cases} \qquad M_f = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ \alpha \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ \beta \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$f(\vec{i})$ $f(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Matrice d'une composition d'applications linéaires

$f,g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linéaires. $\Rightarrow g\circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire.

$$g\circ f(\vec{v}) \overset{\text{déf}}{=} g\left[f(\vec{v})\right] \qquad g\circ f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \\ \vec{v} \longmapsto f(\vec{v}) \longmapsto g[f(\vec{v})] \end{cases}$$

Preuve

$$g\circ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \overset{\text{déf de } g\circ f}{=} g\left[f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\right] \overset{f \text{ est lin.}}{=} g\left[\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})\right]$$

$$\underset{g \text{ est lin.}}{=} \lambda g\left[f(\vec{u})\right] + \mu g\left[f(\vec{v})\right] \underset{\text{déf de } g\circ f}{=} \lambda g\circ f(\vec{u}) + \mu g\circ f(\vec{v}) \qquad \square$$

On fixe la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Montrons que :

$$\boxed{M_{g\circ f} = M_g \cdot M_f}$$

produit de matrice.

preuve base $(\vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = a\vec{i} + \alpha\vec{j} \\ f(\vec{j}) = b\vec{i} + \beta\vec{j} \end{cases} \qquad M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} g(\vec{i}) = c\vec{i} + \gamma\vec{j} \\ g(\vec{j}) = d\vec{i} + \delta\vec{j} \end{cases} \qquad M_g = \begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$g\circ f(\vec{i}) = g\left[f(\vec{i})\right] = g\left(a\vec{i} + \alpha\vec{j}\right) = a\,g(\vec{i}) + \alpha\, g(\vec{j})$$

$$= a\left(c\vec{i} + \gamma\vec{j}\right) + \alpha\left(d\vec{i} + \delta\vec{j}\right) = (ac + \alpha d)\vec{i} + (a\gamma + \alpha\delta)\vec{j}$$

$$g\circ f(\vec{j}) = g\left[f(\vec{j})\right] = g\left(b\vec{i} + \beta\vec{j}\right) = b\,g(\vec{i}) + \beta\, g(\vec{j})$$

$$= b\left(c\vec{i} + \gamma\vec{j}\right) + \beta\left(d\vec{i} + \delta\vec{j}\right) = (bc + \beta d)\vec{i} + (b\gamma + \beta\delta)\vec{j}.$$

$$M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} ac + \alpha d & bc + \beta d \\ a\gamma + \alpha\delta & b\gamma + \beta\delta \end{pmatrix}$$

Or,

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$M_g = \begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ca + d\alpha & cb + d\beta \\ \gamma a + \delta\alpha & \gamma b + \delta\beta \end{pmatrix} = M_g \cdot M_f \qquad \square$$

Changement de base

$B = (\vec{i}, \vec{j})$ $\qquad B' = (\vec{i}\,', \vec{j}\,')$ $\qquad$ deux bases de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \vec{i}\,' = p\vec{i} + q\vec{j} \\ \vec{j}\,' = r\vec{i} + s\vec{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{i} = \pi\vec{i}\,' + \eta\vec{j}\,' \\ \vec{j} = \rho\vec{i}\,' + \sigma\vec{j}\,' \end{cases}$$

Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,'$

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Donc

$$\vec{v} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = x'(p\vec{i} + q\vec{j}) + y'(r\vec{i} + s\vec{j})$$

$$= (px' + ry')\vec{i} + (qx' + sy')\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = px' + ry' \\ y = qx' + sy' \end{cases} \iff \boxed{X = PX'}$$

avec $P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \vec{i}' & \vec{j}' \end{array} \end{array}$

dans B

P est la matrice de passage $B \longrightarrow B'$.

D'autre part, si P est inversible

$$X = PX' \iff P^{-1}X = \underbrace{P^{-1}P}_{I}X' = X'$$

$$\iff \boxed{X' = P^{-1}X}$$

$B' \longrightarrow B$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{i}' = p\vec{i} + q\vec{j} \\ \vec{j}' = r\vec{i} + s\vec{j} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{i} = \pi\vec{i}' + \chi\vec{j}' \\ \vec{j} = \rho\vec{i}' + \sigma\vec{j}' \end{cases}}$$

$P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = P$

existe car B est une base

$P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} \pi & \rho \\ \chi & \sigma \end{pmatrix}$

existe car B' est une base.

$$X = \underset{B\to B'}{P} X' \qquad X' = \underbrace{\underset{B'\to B}{P}}_{= P^{-1}} X$$

Or

$$\boxed{X = P X'}$$

donc $\underset{B\to B'}{P} = P$

$X = \underset{B\to B'}{P} X'$ et $X' = \underset{B'\to B}{P} X$ donc

$\forall X,\ X = \underset{B\to B'}{P}\ \underset{B'\to B}{P} X \Longrightarrow \underset{B\to B'}{P}\ \underset{B'\to B}{P} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrice identité

On a montré que :

$$\boxed{\underbrace{\underset{B'\to B}{P}}_{= P} = \Big(\underbrace{\underset{B\to B'}{P}}_{= P^{-1}}\Big)^{-1}}$$

Résumé

$$X = P X'$$

$$X' = P^{-1} X$$

Changement de base et matrice d'application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ application linéaire, B, B' deux bases de $\mathbb{R}^2$

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$ $\qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$f(\vec{v}) = \tilde{x}\vec{i} + \tilde{y}\vec{j} = \tilde{x}'\vec{i}' + \tilde{y}'\vec{j}'$ $\qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{X}' = \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix}$

On a $\boxed{X = PX'}$ et $\boxed{\tilde{X} = P\tilde{X}'}$

$M = M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ matrice de f dans la base B.

$$\boxed{\tilde{X} = MX}$$

On veut l'expression de la matrice M' de f dans la base B'.

soit $\tilde{X}' = M'X'$ $\qquad M' = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{X} = P\tilde{X}' \\ \tilde{X} = MX \end{array}\right\} \Rightarrow P\tilde{X}' = MX$$

$$\Rightarrow \tilde{X}' = P^{-1}MX = \underbrace{P^{-1}M\overbrace{P}^{X}}_{M'}X'$$

On vient de prouver le

<u>Théorème</u> $\qquad M' = P^{-1}MP$

matrice de f dans B'

matrice de passage $B' \to B$

matrice de f dans B

matrice de passage $B \to B'$