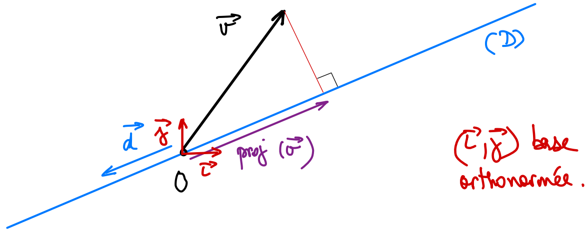
SF - CM5 - gp1

Soit (D) la droite vectorielle (c.-à-d. passant par $O=(0,0)$) de vecteur directeur $\vec{d}$.



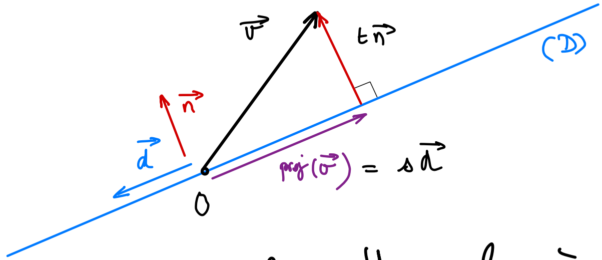
La projection orthogonale de $\boxed{\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}}$ sur (D) sur le vecteur

$$\boxed{\text{proj}(\vec{v}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}\vec{d}}$$

Avec $\vec{d} = d\vec{i} + \delta\vec{j}$, on a :

$$\text{proj}(\vec{v}) = \frac{dx + \delta y}{d^2+\delta^2}\left(d\vec{i} + \delta\vec{j}\right) = \boxed{\tilde{x}\vec{i} + \tilde{y}\vec{j}}.$$ Soit

$$\begin{cases} \tilde{x} = d\,\dfrac{dx+\delta y}{d^2+\delta^2} \\ \tilde{y} = \delta\,\dfrac{dx+\delta y}{d^2+\delta^2} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{d^2+\delta^2} & \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} \\ \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} & \dfrac{\delta^2}{d^2+\delta^2} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de la projection proj dans la base } (\vec{i},\vec{j})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{d}$. Puisque $(\vec{d}, \vec{n})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\vec{v}$ et $p(\vec{v})$ admettent des décompositions uniques :

$$\boxed{\vec{v} = s\vec{d} + t\vec{n}} \quad \text{et} \quad \boxed{p(\vec{v}) = \tilde{s}\vec{d} + \tilde{t}\vec{n}}$$

$$\text{Or } \text{proj}(\vec{v}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}\vec{d} = \vec{d}\cdot(s\vec{d} + t\vec{n})\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} = \Big(s\|\vec{d}\|^2 + \overbrace{t\vec{n}\cdot\vec{d}}^{=0}\Big)\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}$$

$$= s\vec{d}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \tilde{s} = s \\ \tilde{t} = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de } \text{proj}_{(D)} \text{ dans la base } (\vec{d}, \vec{n}).} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Application linéaire $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(*) \quad f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}), \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $f(\vec{0}) = \vec{0}$. (faire $\lambda = \mu = 0$)

On se donne une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une appli linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

telle que $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} \end{cases}$. Du fait que f est linéaire

ces 4 nombres (a, α, b, β) et la donnée de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ caractérisent l'application f. En effet :

$$\underbrace{f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})}_{\text{vecteur quelconque}} \overset{(*)}{=} x\, f(\vec{\imath}) + y\, f(\vec{\jmath}) = x(a\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}) + y(b\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath})$$

$$= (ax + by)\vec{\imath} + (\alpha x + \beta y)\vec{\jmath} = \tilde{x}\vec{\imath} + \tilde{y}\vec{\jmath}$$

$$= \tilde{x}\vec{\imath} + \tilde{y}\vec{\jmath}$$

Par conséquent, (car $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ base) $\begin{cases} \tilde{x} = ax + by \\ \tilde{y} = \alpha x + \beta y \end{cases} \iff \tilde{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} X$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

$$\tilde{X} = \underbrace{\begin{array}{cc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) \\ \left(\begin{array}{c} a \\ \alpha \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} b \\ \beta \end{array}\right) \end{array}}_{\text{matrice de } f \text{ dans la base } (\vec{\imath}, \vec{\jmath})} X, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\tilde{X}$: matrice colonne des coefficients de $f(\vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

X : matrice colonne des coefficients de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

⚠ Si la base change, la matrice de l'application linéaire f dans la nouvelle base est a priori différente.