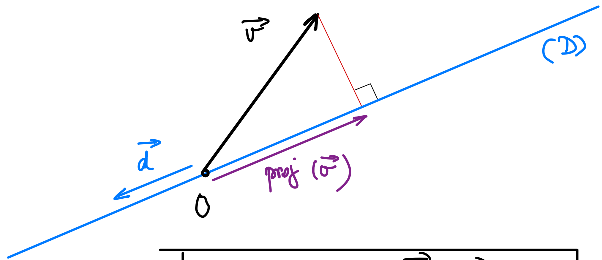
Structures fondamentales CM 3

Applications linéaires et matrices

projection sur une droite vectorielle



$\vec{v} = (x, y)$

$$\boxed{\text{proj}(\vec{v}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}} = \left(\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}\cdot v\right)\underbrace{\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}}_{\text{vecteur unitaire}}$$

vecteur unitaire
sa longueur est 1

On voit que proj satisfait la propriété $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\boxed{(*)\quad f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}),\quad \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2,\ \forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$$

en effet $\text{proj}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\,\vec{d} = \lambda\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\cdot\vec{u}\,\vec{d} + \mu\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\cdot\vec{v}\,\vec{d}$

$= \lambda\,\text{proj}(\vec{u}) + \mu\,\text{proj}(\vec{v})$.

Définition. Si f satisfait $(*)$, on dit que c'est une application linéaire

Calcul des coordonnées de proj ($\vec{v}$)

$\vec{d} = \alpha\vec{i} + \delta\vec{j}$

avec $(\vec{i}, \vec{j})$ base.

(?) Quelles sont les coordonnées (x', y') de proj $(\vec{v})$ lorsque $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\boxed{\text{proj}(\vec{v}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}}$$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$
$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

$$\text{proj}(\vec{v}) = \frac{(\delta\vec{i}+\delta\vec{j})\cdot(x\vec{i}+y\vec{j})}{\|\vec{d}\|^2}(\delta\vec{i}+\delta\vec{j})$$

$$\|\vec{d}\|^2 = \vec{d}\cdot\vec{d} = (d\vec{i}+\delta\vec{j})\cdot(d\vec{i}+\delta\vec{j}) = d^2\cancel{\|\vec{i}\|^2} + \delta^2\cancel{\|\vec{j}\|^2} + \cancel{2d\delta\,\vec{i}\cdot\vec{j}}$$

$$= d^2+\delta^2$$

$$\text{proj}(v) = \frac{dx+\delta y}{d^2+\delta^2}(d\vec{i}+\delta\vec{j}) = x'\vec{i}+y'\vec{j}. \quad \text{Soit}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{d}{d^2+\delta^2}(dx+\delta y) \\ y' = \dfrac{\delta}{d^2+\delta^2}(dx+\delta y) \end{cases}$$

de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = \alpha x+\beta y \end{cases}}$$

avec
$$\boxed{\begin{cases} a = \dfrac{d^2}{d^2+\delta^2} & b = \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} \\ \alpha = \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} & \beta = \dfrac{\delta^2}{d^2+\delta^2} \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ \alpha x+\beta y \end{pmatrix}$$

produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ \alpha x+\beta y \end{pmatrix}$$

où

$$ax+by = \boxed{a \quad b}\boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} = ax+by$$

(multiplication ligne par colonne)

$$\alpha x+\beta y = \boxed{\alpha \quad \beta}\boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} = \alpha x+\beta y$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ \alpha \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ \beta \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Coordonnées}}$ de : $\text{proj}(\vec{v})$ $\quad$ $\text{proj}(\vec{i})$ $\quad$ $\text{proj}(\vec{j})$ $\quad$ $\vec{v}$ $\quad$ $\boxed{\text{dans la base } (\vec{i}, \vec{j})}$

coord de $\text{proj}(\vec{i})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}$$

coord de $\vec{i}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\vec{i} = 1 \times \vec{i} + 0\vec{j}$

---

coord de $\text{proj}(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}$$

coord de $\vec{j}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\vec{i} = 0 . \vec{i} + 1 . \vec{j}$

$$\boxed{\begin{cases} a = \dfrac{d^2}{d^2+\delta^2} & b = \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} \\[2ex] \alpha = \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} & \beta = \dfrac{\delta^2}{d^2+\delta^2} \end{cases}}$$

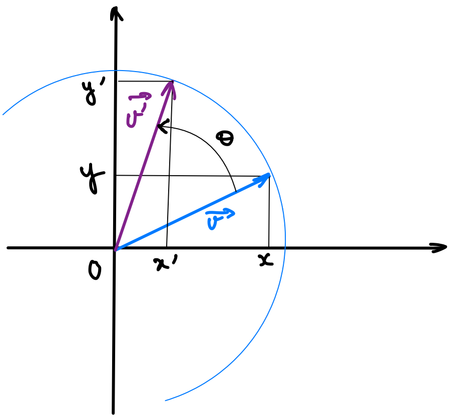
La matrice de proj dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{d^2+\delta^2} & \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} \\[2ex] \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} & \dfrac{\delta^2}{d^2+\delta^2} \end{pmatrix}$$

donc $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{d^2+\delta^2} & \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} \\[2ex] \dfrac{d\delta}{d^2+\delta^2} & \dfrac{\delta^2}{d^2+\delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotation

Considérons l'application $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto r_\theta(\vec{v})$: rotation d'angle θ.



$$\begin{cases} \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{cases}$$

$i^2 = -1$

affixe de $\vec{v} \longrightarrow x + yi = z \in \mathbb{C}$

$\vec{v}' \longrightarrow x' + y'i = z'$

$$\begin{aligned} z' = e^{i\theta} z &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i\,(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= \quad x' \quad + i \quad y' \end{aligned}$$

Par conséquent

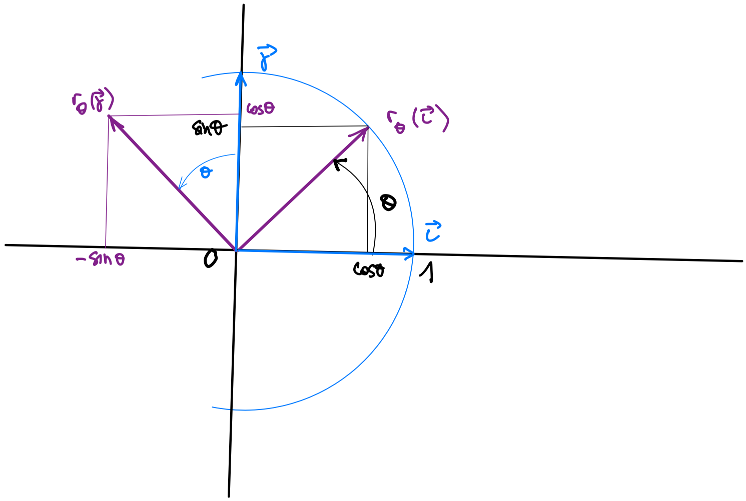
$$\begin{cases} x' = \cos\theta.\,x - \sin\theta.\,y \\ y' = \sin\theta.\,x \;\; \cos\theta.\,y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Remarque r_θ est une application linéaire

<u>preuve</u> $(\lambda z + \mu \tilde{z})' := e^{i\theta}(\lambda z + \mu\tilde{z}) = \lambda \underbrace{e^{i\theta} z}_{z'} + \mu \underbrace{e^{i\theta}\tilde{z}}_{\tilde{z}'}$

affixe de $\vec{v}$ affixe de $\vec{v}$

c'est la propriété $(*)$.



$$R_\theta \cdot (X + \tilde{X}) = R_\theta \cdot X + R_\theta \cdot \tilde{X} \qquad R_\theta \cdot (\lambda X) = \lambda R_\theta \cdot X.$$

carré

colonnes

$$\boxed{A \cdot (X + \tilde{X}) = A \cdot X + A \cdot \tilde{X} \qquad A \cdot (\lambda X) = \lambda A \cdot X.}$$