SF- SPI CM2

Dans $\mathbb{R}^2$, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

$$\text{dist}(A,B) = \|\vec{AB}\| \qquad \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

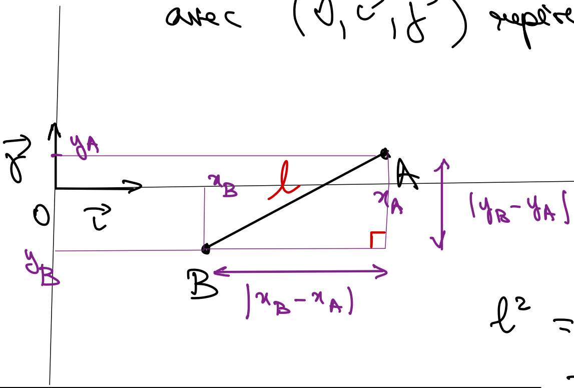
$$\text{dist}(A,B)^2 = \|\vec{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

↑ distance Vque à condition de $\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$

$\vec{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$

avec $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé.

$\ell = \text{dist}(A,B)$



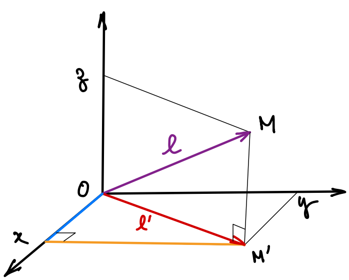
$$\ell^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$
$$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\boxed{\text{dist}(A,B) = \ell = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Dans $\mathbb{R}^3$

$$\text{dist}(O,M) = \|\vec{OM}\| \qquad \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé.



- Pythagore dans le triangle rectangle OM'M nous donne :

$$\ell^2 = \ell'^2 + z^2$$

- Pythagore dans le triangle rectangle horizontal nous donne

$$\ell'^2 = x^2 + y^2$$

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \|\vec{OM}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Dans $\mathbb{R}^n$

$\overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$(O, \vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2, \ldots, \vec{\imath}_n)$ orthonormé.

alors $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

On introduit ainsi le produit scalaire de deux vecteurs.

$\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\qquad \|\vec{u}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

$\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

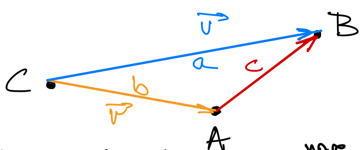
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{déf}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .}$$

Résultat dans l'espace $\mathbb{R}^3$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

démonstration $\quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

On se place dans le plan vect $(\vec{u}, \vec{v})$



Pythagore et sa réciproque nous avons dit :

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff ABC$ est rectangle en $C \iff a^2 + b^2 = c^2$

Or $\vec{u} = \vec{v} + \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ donc

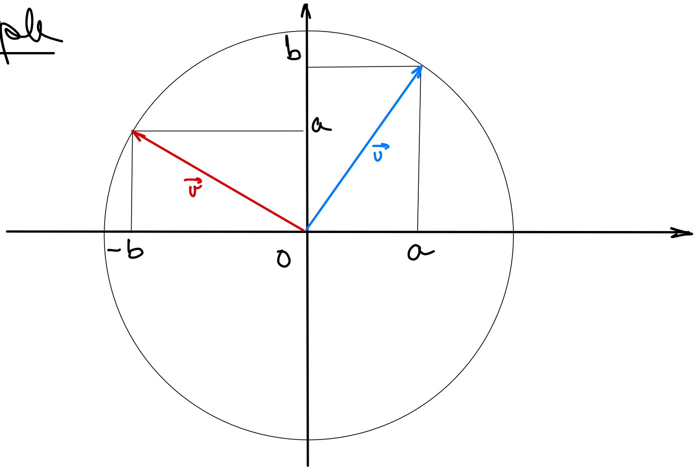
$c^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = a^2 + b^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Par conséquent $\vec{u} \perp \vec{v} \iff a^2 + b^2 = c^2$

$\iff -2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 .$ $\square$

Exemple



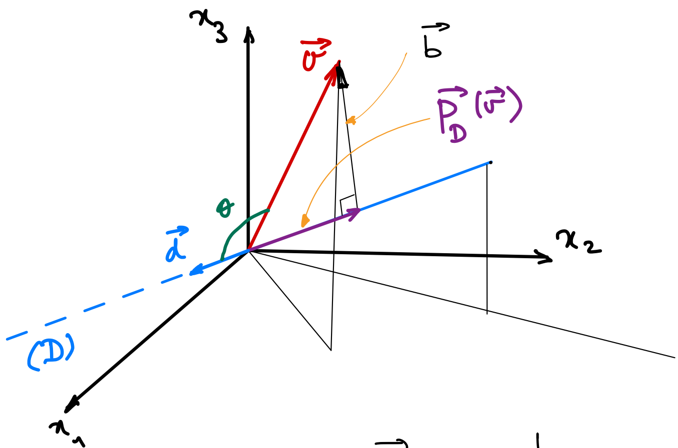
$$\begin{cases} \vec{u} = (a, b) \\ \vec{v} = (-b, a) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \end{cases}$$

Projection orthogonale

Dans $\mathbb{R}^3$, on projette $\vec{v}$ sur la droite (D)



$\vec{v} = a\vec{d} + \vec{b}$ avec $\vec{b} \in (D)^{\perp} \iff \vec{b} \cdot \vec{d} = 0$
$\vec{b} \perp \vec{d}$

décomposition unique.

$$\boxed{\vec{P_D}(\vec{v}) = a\vec{d}}$$

$$\vec{b} = \vec{v} - a\vec{d} \perp \vec{d} \iff (\vec{v} - a\vec{d}) \cdot \vec{d} = 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{d} - a\|\vec{d}\|^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad a\|\vec{d}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{d} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{\vec{v}\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}$$

$$\boxed{\vec{P_D}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}}$$