Contrôle continu 2. Février 2016

- *L'utilisation de tout appareil électronique autre qu'une calculatrice est formellement interdite.*
- *Durée : 1h30.*
- *La seule unité monétaire valable pendant cette épreuve est le doublezon (Ʊ).*

Exercice 1. Un atelier de confection dispose de 70 mètres de coton, 52.50 mètres de laine et 35 mètres de soie. La fabrication d'un complet nécessite 1 mètre de coton, 1 mètre de laine et 0.25 mètre de soie. Celle d'une robe nécessite 1 mètre de coton, 0.5 mètre de laine et un mètre de soie. Un complet se vend 160 Ʊ et une robe 100 Ʊ.

(a) Écrire le programme linéaire correspondant à la maximisation du revenu. On notera x et y respectivement, les nombres de complets et de robes que l'atelier produit.

(b) Le résoudre graphiquement. *On calculera pour cela les pentes de certaines droites.* On précisera
  (i) la solution exacte,
  (ii) le revenu maximal,
  (iii) les quantités utilisées de coton, laine et soie.

(c) Le prix d'une robe étant encore de 100 Ʊ,
  (i) à partir de quel prix du complet est-il rentable d'abandonner la confection des robes ?
  (ii) en-dessous de quel prix du complet est-il rentable d'abandonner la confection des complets ?

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} -2x & +y & -6z & = & 1 \\ -x & -4y & +3z & = & 2 \end{cases}$$

~~(a) Montrer qu'il n'y a que deux bases de coordonnées qui permettent de résoudre le système.~~

Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot pour la base {y,z}.

Exercice 3. À l'aide de la phase 1 de l'algorithme du simplexe, trouver une solution de base réalisable du système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x & +y & -u & & = & 2 \\ 3x & +5y & & +v & = & 15. \end{cases}$$

Exercice 4. On considère le programme linéaire suivant

$$\text{maximiser} \quad 2x+y \quad \text{slc} \quad \begin{cases} 2x & + & 3y & \leq & 6 \\ 2x & + & y & \leq & 4 \\ 3x & + & 2y & \leq & 6 \\ x, & & y & \geq & 0 \end{cases}$$

(a) L'écrire sous forme standard.

(b) Résoudre le programme linéaire à l'aide de la méthode du simplexe. On précisera la solution ainsi que la valeur maximale du programme. *On donnera le détail des calculs avec l'ensemble des tableaux.*

2016 - Opti. Appro. CC2

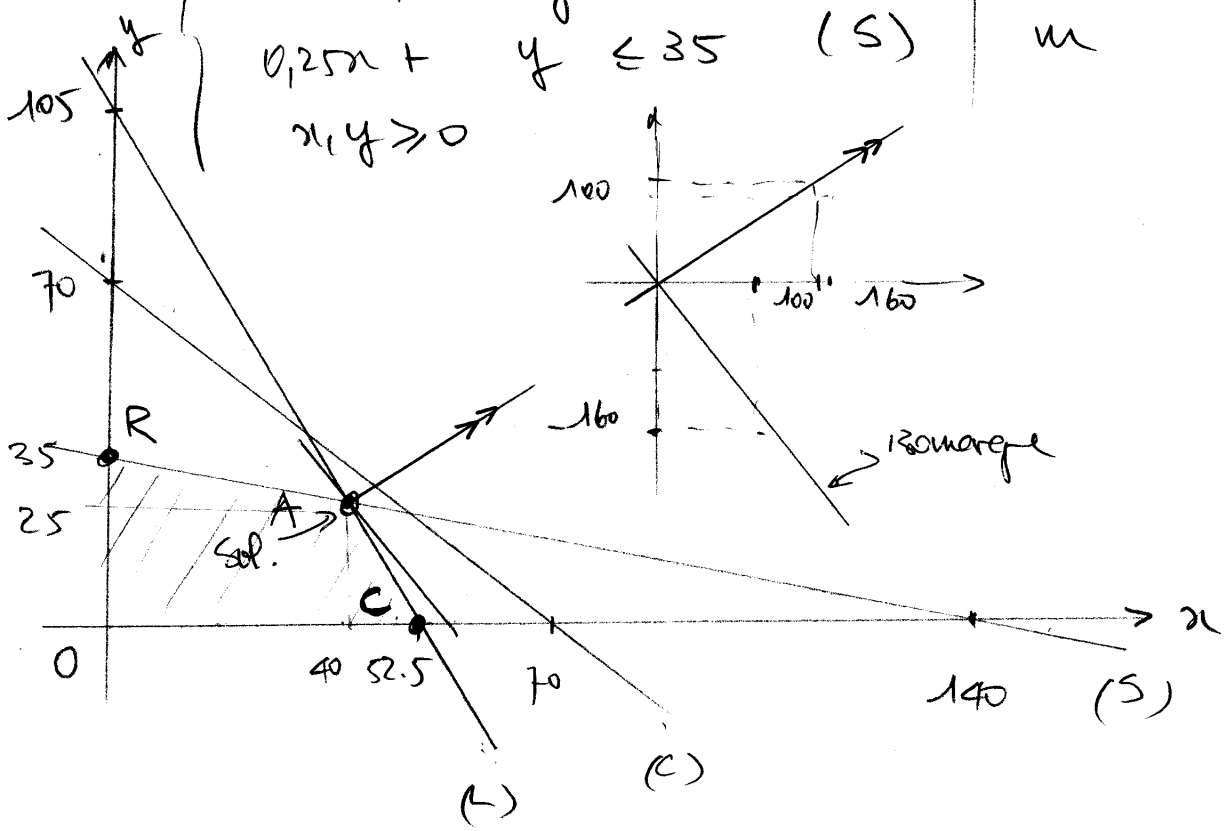
Exercice 1

	complet	robe	
C	1	1	≤ 70
L	1	0,5	≤ 52.5
S	0,25	1	≤ 35
	160 €	100 €	

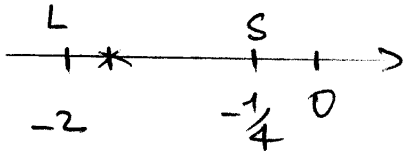
(a)

		unités
max	$160x + 100y$	€
s/c	$x + y \leq 70$ (C)	m
	$x + 0,5y \leq 52.5$ (L)	m
	$0,25x + y \leq 35$ (S)	m
	$x, y \geq 0$	

(b)



$\pi_m = -\frac{160}{100} = -1,6$ $\quad \pi_S = -\frac{1}{4}$, $\quad \pi_L = -\frac{1}{0.5} = -2$



$\Rightarrow$ Sol = (S) $\cap$ (L) = A

$$\begin{cases} x + 0,5y = 52.5 \\ 0,25x + y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_* = 40 \\ y_* = 25 \end{cases}$$

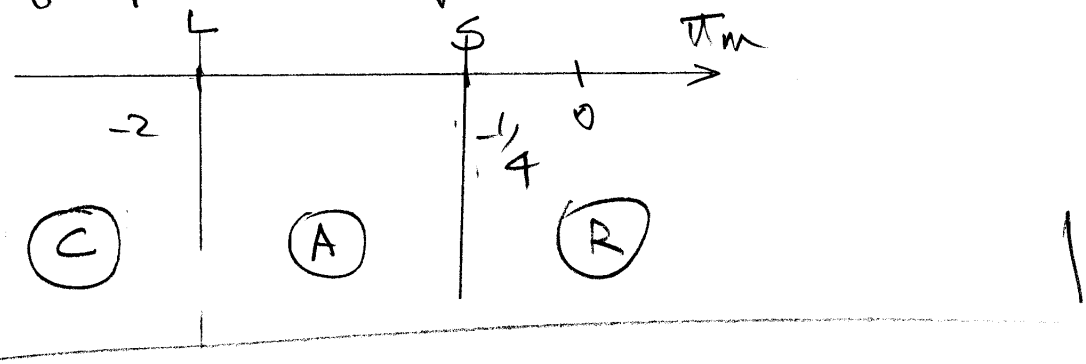
$m_* = 160 \times 40 + 100 \times 25 = 8900$ €

40 complets, 25 robes
revenu : 8900 €
coton : 65 m (il reste 5 m de coton)
laine : 52,5 m
soie : 35 m

(c) (i) L'abandon de la confection des robes correspond au point $C = (52.5, 0)$

(ii) L'abandon de la confection des complets correspond au point $R = (0, 35)$

Stratégie optimale en fonction de π_m :



On note c le prix du complet.

La marge à maximiser est $cx + 100y$

La pente isomarge est : $\boxed{\pi_m = -\frac{c}{100}}$

(i) On choisit (C) lorsque $\pi_m \leq -2$, soit :

$$-\frac{c}{100} \leq -2 \iff \boxed{c \geq 200}$$

(ii) On choisit (R) lorsque $\pi_m \geq -\frac{1}{4}$, soit

$$-\frac{c}{100} \geq -\frac{1}{4} \iff \boxed{c \leq 25}$$

Exercice 2

$$\begin{bmatrix} -2 & \boxed{1} & -6 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2+4L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 & 1 \\ -9 & 0 & \boxed{-21} & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \\ -L_2/21 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 & 1 \\ \frac{3}{7} & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1+6L_2 \\ L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \begin{bmatrix} 4/7 & 1 & 0 & -5/7 \\ 3/7 & 0 & 1 & -2/7 \end{bmatrix}$$

Ce qui signifie que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{7} - \frac{4}{7}x \\ z = -\frac{2}{7} - \frac{3}{7}x \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1/2 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3+2L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x & y & u & v & a \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 3/2 & 1 & -3/2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient $\boxed{x=1,\ y=0,\ u=0,\ v=12}$

Exercice 4

(a) minimiser $-2x - y$

sle
$$\begin{cases} 2x + 3y + v = 6 \\ 2x + y + u = 4 \\ 3x + 2y + w = 6 \\ x, y, v, u, w \geq 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{3} & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3/3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \textcircled{1} & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ L_3 \\ L_4 + 2L_3 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} x \quad y \quad v \quad u \quad w \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 5/3 & 1 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 4 \end{array}\right] \\ \geq 0 \quad \text{(STOP)} \end{array}$$

$\longrightarrow$ $x_* = 2,\ y_* = 0,\ v_* = 2,\ u_* = 0,\ w_* = 0$

$m_* = 4$

ou bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1/2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 3L_2 \\ L_4 + 2L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} x \quad y \quad v \quad u \quad w \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \\ \geq 0 \quad \text{(STOP)} \end{array}$$